

BOG'LIQ BO'LMAGAN TASODIFIY MIQDORLAR TAQSIMOTI UCHUN TENGSIZLIKLAR

Nafasov G'anisher Abdurashidovich¹,

*¹Guliston davlat universiteti "Matematika" kafedrası dotsenti, pedagogika fanlari
bo'yicha falsafa doktori (PhD)*

E-mail: gnafasov87@gmail.com

Xudoybakova Maxliyo G'aybullo qizi²,

²Guliston davlat universiteti "Matematika" yo'nalishi magistranti

E-mail: maxliyoxudoybakova@gmail.com

Annotatsiya: Ushbu maqolada bog'liq bo'lmagan tasodifiy o'zgaruvchilar taqsimoti uchun tengsizliklar va ularning matematik ahamiyati tahlil qilinadi. Tasodifiy o'zgaruvchilar o'rtasidagi mustaqillik, ehtimollik taqsimotlarining bog'liq emasligi holatida, statistik tengsizliklarning qo'llanilishi ko'rib chiqiladi. Maqolada Chebyshev, Markov, va Jensen tengsizliklari orqali tasodifiy o'zgaruvchilarning kutilgan qiymatlari, dispersiyasi va boshqa statistik parametrlarini hisoblashga yordam beradigan matematik metodlar tavsiflanadi. Ushbu tengsizliklar tasodifiy o'zgaruvchilarni yig'ish va taqqoslashda, ehtimolliklarni hisoblashda hamda statistik xulosalar chiqarishda keng qo'llaniladi. Maqolada keltirilgan tengsizliklar va ular bilan bog'liq nazariyalar, statistik tahlil, ehtimollik nazariyasi va matematik modellashtirishda amaliy ahamiyatga ega.

Kalit so'zlar: Bog'liq bo'lmagan tasodifiy o'zgaruvchilar, ehtimollik taqsimotlari, Chebyshev tengsizliklari, Markov tengsizliklari, Jensen tengsizliklari, statistika, matematik modellashtirish, kutilgan qiymat, dispersiya, ehtimollik nazariyasi, tasodifiy o'zgaruvchilar o'rtasidagi mustaqillik.

НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Аннотация: В данной статье рассматриваются неравенства для распределений независимых случайных величин и анализируется их математическое значение. Исследуется применение статистических неравенств в условиях независимости случайных величин и отсутствия связи между их распределениями. В работе описываются математические методы, основанные на неравенствах Чебышёва, Маркова и Йенсена, позволяющие оценивать математическое ожидание, дисперсию и другие статистические характеристики случайных величин. Эти неравенства широко применяются при суммировании и сравнении случайных величин, вычислении вероятностей, а также при формировании статистических выводов. Представленные в статье неравенства и соответствующие теоретические положения имеют практическое значение в статистическом анализе, теории вероятностей и математическом моделировании.

Ключевые слова: независимые случайные величины, распределения вероятностей, неравенство Чебышёва, неравенство Маркова, неравенство Йенсена,

статистика, математическое моделирование, математическое ожидание, дисперсия, теория вероятностей, независимость случайных величин.

INEQUALITIES FOR DISTRIBUTIONS OF INDEPENDENT RANDOM VARIABLES

Abstract: This article examines inequalities for distributions of independent random variables and analyzes their mathematical significance. The application of statistical inequalities is considered under the condition of independence of random variables and the absence of dependence between their distributions. The paper describes mathematical methods based on Chebyshev, Markov, and Jensen inequalities, which allow the evaluation of expected value, variance, and other statistical characteristics of random variables. These inequalities are widely used in summation and comparison of random variables, probability estimation, and drawing statistical conclusions. The inequalities and related theoretical concepts presented in this study have practical importance in statistical analysis, probability theory, and mathematical modeling.

Keywords: independent random variables, probability distributions, Chebyshev inequality, Markov inequality, Jensen inequality, statistics, mathematical modeling, expected value, variance, probability theory, independence of random variables.

KIRISH

Bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar taqsimoti statistik tahlilda keng qo'llaniladigan va ahamiyatga ega bo'lgan mavzulardan biridir. Bu turdagi tasodifiy o'zgaruvchilar o'rtasida hech qanday bog'lanish yo'q bo'lsa, ularning taqsimotlari mustaqil bo'ladi. Mustaqil tasodifiy o'zgaruvchilar uchun turli statistik tengsizliklar, ularning kutilgan qiymatlari, dispersiyasi va boshqa o'lchovlarini tahlil qilishda yordam beradi. Ushbu maqolada, Chebyshev, Markov va Jensen tengsizliklari kabi statistik tengsizliklarning mustaqil tasodifiy o'zgaruvchilarni baholashda qanday qo'llanilishi ko'rsatiladi.

TADQIQOT METODLARI

Bizga bir xil taqsimlangan bog'liq bo'lmagan X_1, X_2, \dots, X_n tasodifiy miqdorlar ketma ketligi berilgan bo'lsin va bu tasodifiy miqdorlarni har biriga mos ravishda $F_1(u), F_2(u), \dots, F_n(u)$ taqsimot mos qo'yilgan bo'lsin.

Quyidagi munosabatni kiritamiz: $S_0=0, S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n, n \geq 1$

$Y=\{y_1, \dots, y_n\}$ -n ta musbat sonlardan tuzilgan ketma-ket sonlar to'plami bo'lib, $y \geq \max(y_1, \dots, y_n)$ tengsizlik o'rinli bo'lsin.

Biz $A(t, \cdot, \cdot)$, $B^2(\cdot, \cdot)$ va $M(\cdot, \cdot)$ lar orqali ko'rsatilgan tartibdagi berilgan oraliqdagi yig'indilarni belgilaymiz, ya'ni t - tartibli absolyut moment, dispersiya, matematik kutilma, Y orqali esa $y_1 y_2 \dots y_n$ o'rinlarda turgan berilgan indeks bo'yicha yig'ilgan momentlarni belgilaymiz, masalan,

$$A(t; -Y, 0) = \sum_{i=1}^n \int_{-y_{ui}}^0 |u|^t dF_i(u)$$

$$B^2(-Y, Y) = \sum_{i=1}^n \int_{-y_i}^{y_i} u^2 dF_i(u)$$

$$M(-\infty; Y) = \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{y_i} u dF_i(u)$$

Teorema 1.1. Agar $0 < t < 1$ bo'lsa, u holda quyidagi tengsizlik o'rinli bo'ladi:

$$P(S_n \geq x) \leq \sum_{i=1}^n P(X_i \geq y_i) + \exp\left\{ \frac{x}{y} - \frac{x}{y} \log\left(\frac{xy^{t-1}}{A(t; 0; Y)} + 1 \right) \right\}$$

Teorema 1.2. Agar $1 \leq t \leq 2$ bo'lsa, u holda quyidagi tengsizlik o'rinli bo'ladi:

$$P(S_n \geq x) \leq \sum_{i=1}^n P(x_i \geq y_i) + \exp\left\{ \frac{x}{y} - \left[\frac{x - M(-Y, Y)}{y} + \frac{A(t; -Y; Y)}{y^t} \right] \cdot \log\left[\frac{xy^{t-1}}{A(t; -Y; Y)} + 1 \right] \right\}$$

Endi $t \geq 2$ uchun keltiramiz:

$$P_4 = \exp\left\{ \left[\beta \frac{x}{y} - \left[\left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) \frac{x}{y} - \frac{M(-Y; Y)}{y} \right] \right] \log\left[\frac{\beta xy^{t-1}}{A(t; 0; y)} + 1 \right] \right\}$$

$$P_5 = \exp\left\{ \left(\beta - \frac{t\alpha}{2} \right) \frac{x}{y} - \left(\beta \frac{x}{y} - \frac{M(-Y; Y)}{y} \right) \log\left[\frac{\beta xy^{t-1}}{A(t; 0; Y)} + 1 \right] \right\}$$

$$P_6 = \exp\left\{ - \frac{\alpha x \left[\frac{\alpha x}{2} - M(-Y; Y) \right]}{e^t B^2(-Y; Y)} \right\}$$

Teorema 1.3. Agar $t \geq 2$, $0 < \delta < 1$, $\beta = 1 - x$ bo'lsa, u holda

$$P(S_n \geq x) \leq \sum_{i=1}^n P(x_i \geq y_i) + \max(P_4 P_6) + P_5$$

bo'ladi.

NATIJALAR VA MUHOKAMA

chap qismlari o'ng qismlariga mos qo'yiladi:

$$\sum_{i=1}^n P(X_i \geq -y_i), A(t; 0; Y), B^2(-\infty; Y), \mu(-Y; Y), \text{ va } \mu(-\infty, Y)$$

miqdorlarni quyidagilar bilan almashtirish mumkin:

$$\sum_{i=1}^n P(X_i \leq -Y_i), A(t; 0; Y), B^2(-\infty; \infty) - \mu(-Y; Y)$$

va $\mu(-Y, \infty)$, ammo $A(t; -Y, Y)$ va $B^2(-Y, Y)$ lar o'zgarishsiz qoladi.

Eslatma 1.2. Yuqorida keltirilgan tengsizliklarda har doim quyidagilar o'rinli $\mu(-Y, Y) = 0$ bo'ladi, agar X_i simmetrik taqsimotga ega bo'lsa va agar

$EX_i = 0$ ($i = \overline{1-n}$) bo'lsa $\mu(-\infty; Y) = 0 - \mu(-Y; \infty) = 0$ bo'ladi.

Eslatma 1.3. Biror bir momentni (1.1)-(1.3) teoremlardagi tengsizliklarga mos keluvchi holati bo'lsa, kesilgan absolyut momentlarni to'la absolyut momentlar bilan almashtirish mumkin

1.1-teoremaning davomi

Agar $t \geq 2$, $\beta = \frac{t}{t+2}$, $\alpha = 1 - \beta$ bo'lsa, u holda

$$P(S_n \geq x) \leq \sum_{i=1}^n P(X_i \geq y_i) +$$

$$+ \exp \left\{ \max \left[\left[-\left(\beta \frac{x}{y} - \frac{\mu(-Y; Y)}{y} \right) \right] \right. \right.$$

$$\left. \left. \bullet \log \left[\frac{\beta x y^{t-1}}{A(t; 0, Y)} + 1 \right], - \frac{\alpha x \left[\frac{\alpha x}{2} - \mu(-Y, Y) \right]}{e^t B^2(-Y, Y)} \right] \right\} \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^n P(X_i \geq y_i) + \exp \left\{ - \left(\beta \frac{x}{y} - \frac{\mu(-Y, Y)}{y} \right) \log \left[\frac{\beta x y^{t-1}}{A(t; 0, Y)} + 1 \right] \right\} +$$

$$+ \exp \left\{ - \frac{\alpha x \left[\frac{\alpha x}{2} - \mu(-Y, Y) \right]}{e^t B^2(-Y, Y)} \right\}. \quad (1.1)$$

1.2 teoreмага qo'shimcha

Agar $t \geq 2$, $\beta = \frac{t}{t+2}$, $\alpha = 1 - \beta$, $EX_i = 0 (i = \overline{1, n})$ bo'lsa, u holda

$$P(S_n \geq x) \leq \sum_{i=1}^n P(X_i \geq y_i) + \left[\frac{\beta x y^{t-1}}{A(t; 0; Y)} \right]^{\frac{\beta x}{y}} + \exp \left\{ - \frac{\alpha^2 x^2}{2 e^t B^2(-\infty; Y)} \right\} \quad (1.2)$$

Yuqorida keltirilgan tengsizliklarni absolyut qiymatlar orqali ifodalansa, u quyidagicha bo'ladi:

Teorema 1.1.4 . $0 < t \leq 1$ bo'lganda quyidagi tengsizlik o'rinli bo'ladi:

$$P(|S_n| \geq x) \leq \sum_{i=1}^n P(|X_i| \geq y_i) + \exp \left\{ \frac{x}{y} - \frac{x}{y} \log \left[\frac{xy^{t-1}}{A(t; -Y, Y)} + 1 \right] \right\} \quad (1.2)$$

1.2- teorema shartiga ko'ra agar $EX = 0, E|X_i| < \infty, t \geq 2 (i = \overline{1, \dots, n})$ bo'lsa, u holda,

$$P(|S_n| \geq X) \leq \sum_{i=1}^n P(|X_i| \geq \gamma X) + \left[\frac{\beta x^{t\gamma^{t-1}}}{A(t; -\infty, \infty)} + 1 \right] - \frac{\beta}{\gamma} + \exp \left\{ - \frac{\alpha^2 x^2}{\gamma^t e^t B^2(-\infty, \infty)} \right\} (\gamma > 0). \quad (1.3)$$

Levi tengsizligining ayrim ko'rinishlari.

Levi tengsizligining ayrim umumlashmalari bilan ham tanishib chiqamiz.

O.I.Klyosovning [3] dagi ilmiy tadqiqotlarida, A.N.Kolmogorov va P.Levilarning ilmiy tadqiqotlarida keltirilgan tengsizliklarni $d > 1$ hol uchun keltiramiz.

Teorema 1.5 Faraz qilaylik $\{X(\bar{k}); \bar{k} < \bar{n}\}$ lar bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar bo'lsin, bunda $0 < \alpha \leq 2$, $0 < q < 1$.

Quyidagini kiritamiz:

$$M_{\alpha} = \sum_{\bar{k} < \bar{n}} E |X(\bar{k})|^{\alpha}.$$

U holda barcha $x > 0$ uchun quyidagi tengsizlik o'rinli,

$$P(\max_{\bar{k} < \bar{n}} S(\bar{k}) \geq x) \leq q^{-d} P(S(\bar{n}) \geq -d(\frac{M_{\alpha} L}{1-q})^{\frac{1}{\alpha}}), \quad (1.4)$$

bu yerda $L=1$, agar $0 < \alpha \leq 1$, yoki $\alpha = 2$ va $L=2$ bo'lsa, agar $0 < \alpha \leq 2$ bo'lsa.

Teorema 1.6. Faraz qilaylik $\{X(\bar{k}); \bar{k} < \bar{n}\}$ lar bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar bo'lsin

$$EX(\bar{k}) = 0, \quad B(\bar{n}) = \sum_{\bar{k} < \bar{n}} EX^2(\bar{k}),$$

u holda $\forall x > 0$ uchun quyidagilar o'rinli:

$$P(\max_{\bar{k} < \bar{n}} S(\bar{k}) \geq x) \leq q^d P(S(\bar{n}) \geq x - d\sqrt{2B(\bar{n})}),$$

$$P(\max_{\bar{k} < \bar{n}} S(\bar{k}) \geq x) \leq q^{-d} P(S(\bar{n}) \geq x - d\sqrt{2B(\bar{n})}) \quad (1.5)$$

Teorema 1.7 Agar biror $c \geq 0$, $q > 0$ uchun

$$P(S(\bar{n}) - S(\bar{k}) \geq -c) \geq q \quad (\bar{k} < \bar{n}),$$

bo'lsa, u holda

$$P(\max_{\bar{k} < \bar{n}} S(\bar{k}) \geq x) \leq q^{-d} P(S(\bar{n}) \geq x - cd) \quad (1.6)$$

Bizga ma'lumki, $\forall x > 0$ uchun quyidagi Levi tengsizligi o'rinli

$$P\{\max_{1 \leq k \leq n} [S_k - \mu(S_k - S_n)] \geq x\} \leq 2P(S_n \geq x) \quad (1.7)$$

bu yerda $\mu(x)$ -X tasodifiy miqdorning medianasi.

Bu tengsizlikdan, agar quyidagi qushimcha shartlar o'rinli bo'lsa, u holda $x > 0$ uchun

$$P\{\max_{1 \leq k \leq n} S_n \geq x\} \leq 2P\{S_n \geq x - (2 \sum_{i=1}^n EX_i^2)^{\frac{1}{2}}\} \quad (1.8)$$

ni hosil qilamiz.

(1.4) tengsizlik A.N.Kolmogorov tomonidan takroriy logarifm qonunida hosil qilingan edi.

[2-9] ilmiy tadqiqotdagi tengsizliklardan keltiramiz.

Teorema 1.8 Faraz qilaylik X_1, \dots, X_n -bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar va $i = 2, \dots, n$ uchun

$EX_i = 0, EX_i^2 < \infty$ bo'lsin.

Quyidagini kiritamiz:

$$D = \sum_{i=1}^n EX_i^2$$

u holda $\forall q, 0 < q < 1$ uchun va $\forall x > 0$ uchun quyidagi tengsizlik o'rinli:

$$P\{\max_{1 \leq k \leq n} S_k \geq x\} \leq \frac{1}{q} P\{S_n \geq x - (\frac{D}{1-q})^{\frac{1}{2}}\} \quad (1.9)$$

bundan $q = \frac{1}{2}$ bo'lganda (1.5) dan (1.4) kelib chiqadi.

Teorema 1.9 Agar $s \geq 0$ va $q > 0$ uchun

$$P\{S_n - S_k \geq -c\} \geq q, \quad k=1, \dots, n-1,$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda $\forall x > 0$ uchun quyidagi munosabat o'rinli:

$$P\{\max S_k \geq x\} \leq \frac{1}{q} P\{S_n \geq x - s\}$$

XULOSA

Bog'liq bo'lmagan tasodifiy o'zgaruvchilar taqsimoti uchun tengsizliklar, statistika va ehtimollik nazariyasida muhim rol o'ynaydi. Ular, tasodifiy o'zgaruvchilarni yig'ish, taqqoslash va baholashda matematik vosita sifatida ishlatiladi. Chebyshev, Markov va Jensen tengsizliklari kabi asoslardagi tengsizliklar, mustaqil tasodifiy o'zgaruvchilarning kutilgan qiymatlari va dispersiyasini aniqlashda, shuningdek, ehtimolliklarning taqsimotini tahlil qilishda keng qo'llaniladi. Ushbu maqolada taqdim etilgan tengsizliklar va ularning matematik jihatlari, nazariy va amaliy tahlil uchun mustahkam asos yaratadi.

Adabiyotlar

1. Gafurov M.U. Otsenki veroyatnostnykh karakteristik vkhoda sluchaynogo blujdaniya za krivolineynuyu granisu: Dis. doktor.fiz.-mat., nauk. Tashkent:1981.281s.
2. Sirajiddinov S.X., Gafurov M.U., «Metod ryadov v granichnykh zadachax dlya sluchaynykh blujdaniy». Tashkent.1987,140 s.
3. Klesov O.I. Usilennyy zakon bolshix chisel dlya sluchaynykh poley: Dis. Kand. Fiz.-mat.nauk. Kiev:1981.123s.
4. Nagaev S.V., Fuk D.X. Veroyatnostnye neravenstva dlya summ nezavisimyykh sluchayno'x velichin. Teor. ver. i yee prim. 1971. T.16.S.660-678.
5. Nagaev S.V., Sakoyan S.K. Ob odnoy otsenke dlya veroyatnostey bolshix ukloneniya . Sb. Predelnyye teoremy i matematicheskaya statistika. Tashkent.FAN. 1976 S.132-140.
6. Petrov V.V. Summy nezavisimyykh sluchaynykh velichin.M. Nauka. 1972 .416s.
7. Petrov V.V. Obobshchenie odnogo neravenstva Levi . Teor. ver. i yee prim. 1975.. T.20.S.140-144
8. Xamdamov I.M. . Obobshchenie neravenstv Levi- Petrova i ix prilozheniya. Sb. Veroyatnostnyye modeli i matematicheskaya statistika. Tashkent.FAN. 1987. S.131-147.