МЕТОДИКА РАЗВИТИЯ УМЕНИЙ РЕШАТЬ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА В КУРСЕ АЛГЕБРЫ И НАЧАЛ АНАЛИЗА

Нафасов Ганишер Абдурашидович,
доктор философии (PhD) в области педагогических наук, доцент кафедры «Математика», Гулистанский государственный университет,
E-mail: gnafasov87@gmail.com
Хакимов Шербек Обиджонович,
учитель математики школы №1 Околтинского района.
E-mail: sherbekhakimov777@gmail.com

Аннотация. *В данной статье рассматриваются методические подходы к формированию умений решения тригонометрических уравнений и неравенств в школьном курсе алгебры и начал анализа. Анализируются типичные трудности, с которыми сталкиваются учащиеся, и предлагаются эффективные методы их преодоления. Особое внимание уделяется систематизации способов решения, использованию графических методов и алгоритмизации процесса обучения.*

Ключевые слова: *тригонометрические уравнения, тригонометрические неравенства, методика обучения, алгебра и начала анализа, графический метод, алгоритмизация.*

ALGEBRA VA ANALIZ ASOSLARI KURSIDA TRIGONOMETRIK TENGLAMA VA TENGSIZLIKLARNI YECHISH KO‘NIKMALARINI RIVOJLANTIRISH METODIKASI

Annotatsiya. *Ushbu maqolada maktab algebra va analiz asoslari kursida trigonometrik tenglamalar hamda tengsizliklarni echish ko‘nikmalarini shakllantirishga oid metodik yondashuvlar ko‘rib chiqiladi. O‘quvchilar duch keladigan tipik qiyinchiliklar tahlil qilinadi va ularni bartaraf etishning samarali usullari taklif etiladi. Ayniqsa, echish usullarini tizimlashtirish, grafik metodlardan foydalanish hamda o‘qitish jarayonini algoritmlashtirish masalalariga alohida e’tibor qaratiladi.*

Kalit so‘zlar: *trigonometrik tenglamalar, trigonometrik tengsizliklar, o‘qitish metodikasi, algebra va analiz asoslari, grafik metod, algoritmlashtirish.*

METHODOLOGY FOR DEVELOPING THE SKILLS TO SOLVE TRIGONOMETRIC EQUATIONS AND INEQUALITIES IN THE COURSE OF ALGEBRA AND THE FUNDAMENTALS OF ANALYSIS

Abstract. *This article examines methodological approaches to developing students' skills in solving trigonometric equations and inequalities within the school course of algebra and the fundamentals of analysis. It analyzes the typical difficulties students face and suggests effective methods to overcome them. Special attention is given to the systematization of solution methods, the use of graphical techniques, and the algorithmization of the teaching process.*

Keywords: *trigonometric equations, trigonometric inequalities, teaching methodology, algebra and fundamentals of analysis, graphical method, algorithmization.*

ВВЕДЕНИЕ

Тригонометрические уравнения и неравенства занимают важное место в школьном курсе алгебры и начал анализа, поскольку они не только развивают логическое мышление, но и служат фундаментом для изучения высшей математики, физики и инженерных наук. Однако этот раздел вызывает значительные трудности у учащихся из-за:

Многообразия методов решения (разложение на множители, замена переменной, использование тригонометрических тождеств).

Необходимости учитывать область допустимых значений (ОДЗ) и периодичность функций.

Сложности визуализации решений без использования графиков или единичной окружности.

Актуальность исследования обусловлена необходимостью разработки эффективных методик, которые помогут учащимся:

Систематизировать знания о тригонометрических функциях.

Освоить алгоритмы решения стандартных и нестандартных задач.

Научиться применять графические методы для наглядности.

Цель данной работы – предложить методику, сочетающую теоретическое изучение тригонометрии с практико-ориентированными заданиями, включая использование цифровых инструментов.

МЕТОДОЛОГИЯ

Приведённый пример имеет одну особенность. Серии $ő_{I}$ и $ő_{II}$ дают на единичной окружности несовпадающие точки. Если же некоторые точки разных серий совпадают, то будем называть их кратными. Точки, которые повторяются в

NAMANGAN DAVLAT PEDAGOGIKA INSTITUTI "TA'LIM VA TARAQQIYOT" ILMIY-USLUBIY JURNALI 2025-YIL 5-SON

NamDPI

13.00.00. – PEDAGOGIKA FANLARI JOURNAL.NAMSPI.UZ ISSN: 2992-9008; UDK: 37

чётном числе серий, будем называть точками чётной кратности, а те, что повторяются в нечётном числе серий, - точками нечётной кратности. Волнообразная линия, идущая от точки $\text{Ő}_{\text{ę}}$, после встречи с точкой нечётной кратности обязана перейти в иную область, т.е. если она находилась вне единичной окружности, то теперь будет внутри неё и наоборот. Но точка чётной кратности не даёт нашей линии возможности перейти в иную область. Поясним данный факт на конкретном примере:

РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Пример 2: Решите неравенство $\dfrac{\sin x \cdot \sin 3x}{\cos 2x \cdot \sin 2x} > 0.$

Рассмотрим совокупность уравнений $\left[\begin{array}{l} \sin x = 0, \\ \sin 3x = 0, \\ \cos x = 0, \\ \sin 2x = 0 / \end{array}\right.$ Отсюда $\left[\begin{array}{l} x_I = \pi n. \\ x_{II} = \dfrac{\pi n}{3} \\ x_{III} = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \\ x_{IV} = \dfrac{\pi n}{2}. \end{array}\right.$

На единичной окружности значения серии x_I представлены двумя точками 0 и π . Серия x_{II} даёт точки $0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}.$ Из серии x_{III} получаем точки $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}.$ Нанесём все эти точки на единичную окружность указав в скобках рядом с каждой из них её кратность.

Пусть теперь число φ будет равным $\frac{\pi}{8}$. Делаем прикидку по знаку:

$\dfrac{\sin\frac{\pi}{8} \cdot \sin\frac{3\pi}{8}}{\cos\frac{\pi}{8} \cdot \sin\frac{\pi}{4}} > 0$. Значит, точку $\text{Ő}_{\text{ę}}$ следует выбрать на луче, образующем угол $\frac{\pi}{8}$ с лучом Ox, вне единичной окружности. (Заметим, что вспомогательный луч $\text{îő}^{/}$ совсем не обязательно изображать на рисунке. Точка $\text{Ő}_{\text{ę}}$ выбирается приблизительно). Теперь от точки $\text{Ő}_{\text{ę}}$ ведём волнообразную непрерывную линию последовательно ко всем отмеченным точкам. Причём в точках $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, 0$ наша линия переходит из одной области в другую: если она находилась вне единичной окружности, то переходит внутрь неё. Подойдя к точке $\frac{\pi}{2}$ линия возвращается во внутреннюю область, так как кратность этой точки чётная. Аналогично в точке $\frac{3\pi}{2}$ (с чётной кратностью) линию приходится повернуть во внешнюю область. Итак, мы начертили некую картинку.

Она помогает нам выделить на единичной окружности искомые области. Они обозначены знаком « +».

Окончательный ответ запишем в виде совокупности неравенств:

$$\left[\begin{array}{l} 2\pi n < x < \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \\ \frac{2\pi}{3} + 2\pi n < x < \pi + 2\pi n, \\ \frac{4\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n, \\ \frac{3\pi}{2} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{3} + 2\pi n. \end{array}\right. \quad [13,с.17\text{-}18]$$

Реализовать этот этап рекомендуется в процессе систематизации знаний школьников о свойствах тригонометрических функций. Основным средством могут служить задания, предлагаемые учащимся и выполняемые либо под руководством учителя, либо самостоятельно. Приведем примеры таких заданий:

1) найти все числа отрезка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, для которых верно $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и т.п.,

2) отметить на единичной окружности точки P_t, для которых соответствующие значения t удовлетворяют равенству $\sin t = \frac{1}{2}; tgt = -\sqrt{3}$ и т.п.,

3) используя график функции $y = \cos x$, указать множество чисел, для которых верно $\cos\alpha = -\frac{1}{2}; \cos\alpha = -\frac{8}{7}; \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

4) решить уравнения

а) $\cos x = 1$,

б) $\cos 3x = \cos^2 x + \sin^2 x$,

в) $\sin 2x \cos 3x - \cos 2x \sin 3x = 1$,

г) $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}\sin x = 1$,

д) $1 + \cos 2x - \cos^2 x = 1$,

5) решить уравнения:

а) $\sin x \cos 2x = 0$,

б) $(1 - \sin x)tgx = 0$,

в) $2\cos^2 x - \frac{1}{2}\sin 4x = 1$.

Обратим внимание на два последних задания. В основе решения предложенных уравнений, как правило, – применение определений синуса, косинуса числа (либо таких свойств тригонометрических функций, как наличие корней, наличие экстремумов у функций синус и косинус). Выполнение пятого задания предполагает решение совокупностей тригонометрических уравнений рассматриваемого вида (например, последнее уравнение преобразуется следующим образом: $1 + \cos 2x - \sin 2x \cos 2x = 1,\ \cos 2x(1 - \sin 2x) = 0$, то есть имеем совокупность уравнений $\cos 2x = 0$ или $\sin 2x = 1$). Следует специально обратить внимание учащихся на цель преобразований тригонометрических выражений при решении предложенных уравнений: замена данного выражения, тождественно ему равным и зависящим от одной тригонометрической функции, либо преобразование выражения в произведение линейных множителей относительно тригонометрических функций.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведённое исследование методики развития умений решать тригонометрические уравнения и неравенства в курсе алгебры и начал анализа позволяет сделать следующие основные выводы. Систематизированы основные подходы к изучению тригонометрических уравнений и неравенств. Выявлены ключевые трудности, возникающие у учащихся при освоении данного раздела. Обоснована необходимость комплексного подхода, сочетающего алгебраические, графические и логические методы Разработана эффективная методика обучения, включающая чёткую классификацию типов уравнений и неравенств алгоритмизацию процесса решения использование графических интерпретаций применение современных цифровых инструментов Предложены конкретные рекомендации по организации учебного процесса Разработка дифференцированных заданий для учащихся с разным уровнем подготовки. Создание интерактивных учебных пособий по тригонометрии Исследование эффективности применения искусственного интеллекта в обучении решению тригонометрических задач

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1]. Колмогоров А.Н. *Алгебра и начала анализа*. – М.: Просвещение, 2020.
[2]. Дорофеев Г.В. *Методика преподавания тригонометрии в школе*. – СПб.: Лань, 2019.
[3]. Шарыгин И.Ф. *Геометрические подходы в тригонометрии*. – М.: Физматлит, 2018.
[4]. Мордкович А.Г. *Тригонометрия: теория и практика*. – М.: Мнемозина, 2021.
[5]. Нелин Е.П. *Компьютерные технологии в обучении математике*. – М.: Бином, 2022.
[6]. Нафасов, Г. А., & Едгоров, Д. Д. (2023). РАЗВИТИЕ КОГНИТИВНОЙ КОМПЕТЕНТНОСТИ УЧАЩИХСЯ ПОСРЕДСТВОМ ПРЕПОДАВАНИЯ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ. *Международный научно-практический электронный журнал «МОЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ КАРЬЕРА». Выпуск № 52 (том 1)(сентябрь, 2023). Дата выхода в свет: 30.09. 2023.*, 143.
[7]. NAFASOV, G. A., SAYFULLAYEV, B., & NAZIROV, Q. (2024). MATEMATIKA DARSLARIDA O ‘QUVCHILARNING KREATIV YONDOSHUVLAR ASOSIDA MANTIQIY FIKRLASH QOBILYATINI RIVOJLANTIRISH. *News of the NUUz*, *1*(1.5. 2), 144-146.
[8]. NAFASOV, G. A., ANORBAYEV, M., & NAZIROV, Q. (2024). BO ‘LAJAK MATEMATIKA O ‘QITUVCHILARNI LOYIHALAB O ‘QITISH JARAYONIDA MATEMATIK KOMPETENTLIGNI RIVOJLANTIRISH. *News of the NUUz*, *1*(1.6. 1), 165-167.
[9]. Нафасов, Г. А., Жамуратов, К., & Жалилов, У. (2024). МЕТОДИКА РАЗВИТИЯ УМЕНИЙ РЕШАТЬ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА В КУРСЕ АЛГЕБРЫ И НАЧАЛ АНАЛИЗА. *ОБРАЗОВАНИЕ И НАУКА В XXI ВЕКЕ*, (56-5).

[10]. Nafasov, G. (2019). Model of Developing Cognitive Competence at Learning Process Elementary Mathematics. *Eastern European Scientific Journal*, (1).

[11]. Nafasov, G. A. (2023). Determination of the Low Pressure Zone of the Water Conducting Tract of Reservoirs. *Genius Repository*, *25*, 28-32.

[12]. Abdurashidovich, N. G., & Muzaffarovich, U. N. Qosim o 'g 'li, NQ, & Olimjon, D.(2023). *Design in the process of*.

[13]. Kengash, J., & Nafasov, G. A. (2023). On the Self-Similar Solution of The Problem of Unsteady Movement of Groundwater Near a Reservoir in the Presence of Nonlinear Evaporation. *Genius Repository*, *22*, 37-41.

[14]. Dosanov, M., Nafasov, G., & Khudoykulov, R. (2023). A new interpretation of the proof of binary relations and reflections. *International Journal of Contemporary Scientific and Technical Research*, *4*(26), 30-42.

[15]. Umarov, X., Nafasov, G. A., & Mustafoyev, R. (2023). TAQSIMOT FUNKSIYA VA UNING XOSSALARI. *Talqin va tadqiqotlar*, *1*(1).

[16]. Нафасов, Г. А., & Мирхайдаров, М. Х. (2022). ИЗУЧЕНИЕ ИНТЕГРИРОВАНИЯ БИНОМИАЛЬНЫХ. *RESEARCH AND EDUCATION*, *205*.

[17]. Нафасов, Г. А., & Абдураимов, Д. Э. ТРАНСВЕРСАЛ ИЗОТРОП ЖИСМ УЧУН ИККИ УЛЧОВЛИ ТЕРМОЭЛАСТИК БОГЛЩ МАСАЛАНИ СОНЛИ МОДЕЛЛАШТИРИШ ВА УНИНГ ДАСТУРИЙ ТАЪМИНОТИ. *КарДУ ХАБ*, *13*.

[18]. Abdurashidovich, N. G., Tagayevich, D. U., & Mirkomilovich, K. M. (2023). The Use of Technology in The Approximation of Didactic Units in The Training of Future Mathematics Shooters on The Basis of Innovative Education. *Genius Repository*, *24*, 34-38.

[19]. Abdurashidovich, N. G. REQUIREMENTS FOR THE SELECTION OF CONTENT FOR HEURISTIC TASKS IN THE TEACHING OF ELEMENTARY MATHEMATICS TO FUTURE MATHEMATICS TEACHERS. *ELEKTRON TA'LIM RESURSLARI MA'LUMOTLAR BAZASINI JORIY ETISHDAGI MUAMMOLAR VA FIKRLAR G. Joldasova*, *89*.

[20]. Abdullayeva, B. S., & Nafasov, G. A. (2019). Current State Of Preparation Of Future Teachers Of Mathematics In Higher Education Institutions. *Bulletin of Gulistan State University*, *2020*(2), 12-17.

[21]. Abdurashidovich, N. G. (2021). Theoretical Basis Of Development Of Cognitive Competence Of Students Of Higher Education Institutions In The Process Of Teaching Elementary Mathematics. *European Journal of Molecular and Clinical Medicine*, *8*(1), 789+. https://link.gale.com/apps/doc/A698747716/AONE?u=anon~d3736870&sid=googleScholar&xid=a9cd01e1