



O'zbekiston Respublikasi
Maktabgacha va maktab
ta'limi vazirligi

ISSN: 2992-9008
UDK: 37

TA'LIM VA TARAQQIYOT

Ilmiy-uslubiy jurnali



2026-YIL 5-SON

www.journal.namspi.uz

Bosh muharrir: Namangan davlat pedagogika instituti rektori B.E.Xusanov
Mas'ul muharrir: Ilmiy ishlar va innovatsiyalar bo'yicha prorektor M.R.Qodirxonov
Mas'ul muharrir o'rinbosari: Ilmiy tadqiqotlar, innovatsiyalar va ilmiy-pedagogik kadrlar tayyorlash bo'limi boshlig'i J.A.Yuldashev

TAHRIR HAY'ATI

Aniq va tabiiy fanlar: k.f.d., prof. Sh.Abdullayev, f-m.f.d., dots. R.Xakimov, k.f.d., prof. N.Vohidova, k.f.d., dots. M.Qodirxonov, b.f.d., dots. A.Batashov, f-m.f.n., dots., T.Abdullayev, p.f.n., dots. M.Eshnazarova, p.f.n., dots. G'.Nafasov, p.f.n., dots. M.Boltayeva.

Texnika fanlari: t.f.d., prof. A.Umarov, t.f.d., prof. A.Qayumov, PhD, dots. Sh.Xudoyqulov, PhD, dots. Abdunazarov.

Ijtimoiy-gumanitar fanlar: s.f.d., prof. T.Fayzullayev, tar.f.d., prof. A.Rasulov. f.f.d., prof. M.Ismoilov, i.f.d., dots. N.Sotivoldiyev, t.f.n., dots. A.Isoqboyev, f.f.n., dots. O.Mamatov, t.f.n., dots. Z.Haydarov, PhD. J.Yuldashev, PhD. A.Abdullayev.

Pedagogika fanlari: p.f.d., prof. B.Xodjayev, p.f.d., prof. X.Najmiddinova, p.f.d., prof. T.Ismoilov, p.f.d., prof. S.Abdullayev. p.f.d., prof., M.Y.Sobirova, p.f.d., prof., R.Zamilova, p.f.d., prof. Sh.Xujamberdiyeva, p.f.d., dost. M.Asqarova, PhD, dots. M.Asranboyeva.

Filologiya fanlari: fil.f.d., prof. N.Uluqov, fil.f.d., prof. H.Usmanova, f.f.d., dots. X.Shokirova, p.f.n., dots. S.Misirov, p.f.n., dots. Sh.Ubaydullayev, PhD, dots. P.Lutfullayev, PhD, dots. M.Yakubbayev.

Texnik muharrir: R.Tursunov

Tahririyat manzili: Namangan shahri, Uychi ko'chasi, 316-uy.

Pochta indeksi: 160136, **Faks:** (0369) 227-27-21,

Email: Info@namspi.uz

"Ta'lim va taraqqiyot" ilmiy-uslubiy jurnali elektron to'plam sifatida O'zbekiston Respublikasi Prezidenti Administratsiyasi huzuridagi Axborot va ommaviy kommunikatsiyalar agentligi (AOKA)ning 2022-yil 25-oktabrdagi № 045044 raqamli guvohnomasi asosida chop etiladi. Jurnal Oliy Attestatsiya komissiyasining 2024-yil 30-noyabrdagi (№ 364/5) yig'ilishi qaroriga asosan pedagogika fanlari bo'yicha falsafa fanlari doktori (PhD) va fan doktori (DSc) ilmiy darajasiga talabgorlarning dissertatsiya ishlari yuzasidan asosiy ilmiy natijalarini chop etish uchun tavsiya etilgan. UDK: 37, Xalqaro standartlashtirish raqami (ISSN): 2992-9008.

Maqolalarning ilmiy saviyasi va keltirilgan ma'lumotlar uchun mualliflar javobgar hisoblanadi.

NAMANGAN DAVLAT PEDAGOGIKA INSTITUTI 2026

MAXSUSLIKKA EGA ISSIQLIK TARQALISH TENGLAMASI UCHUN ARALASH MASALA YECHIMINING KORREKTLIGI

Abdulxamidov Ulug'bek Abdulpatto o'g'li,

Osiyo Xalqaro Universiteti magistranti

E-mail: abdulhamidovbek80@gmail.com

Annotatsiya: Maqolada koeffitsiyenti $k(x) = |x - x_0|^\alpha$ ko'rinishidagi darajaviy maxsuslikka (degeneratsiyaga) ega issiqlik tarqalish tenglamasi uchun aralash (boshlang'ich-chegaraviy) masala yechimining korrektiligi tadqiq qilinadi. Issiqlik o'tkazuvchanlik koeffitsiyentining soha ichidagi yoki chegarasidagi nuqtada nolga aylanishi klassik nazariya natijalarini bevosita qo'llash imkonini cheklaydi; shu bois maxsuslik holida yechimning mavjudligi, yagonaligi va ma'lumotlarga uzluksiz bog'liqligini asoslash dolzarb muammo bo'lib qoladi. Tadqiqotning maqsadi — ushbu masalaning Adamar ma'nosida korrektiligini funksional analiz usullari yordamida isbotlashdan iborat. Ishda vaznga ega Sobolev fazolari, energetik baholash usuli, Galyorkin yaqinlashishi hamda Obyen–Lions kompaktlik lemmasi qo'llanilgan. Asosiy natija sifatida $0 < \alpha < 2$ diapazonda maxsuslik darajasi α ga bog'liq bo'lmagan, oshkor konstantali aprior energetik baho olindi va u vaznli Hardy hamda Poincaré tengsizliklari bilan asoslandi. Ushbu bahodan zaif yechimning mavjudligi va yagonaligi, shuningdek boshlang'ich ma'lumot, manba va koeffitsiyentga nisbatan Lipshits turg'unligi kelib chiqadi; natijada masalaning to'liq korrektiligi isbotlanadi. Bundan tashqari, xos qiymatlarning maxsuslik darajasi bo'yicha monotonligi aniqlandi. Nazariy natijalar aniq misollar va sonli hisoblar bilan tasdiqlangan.

Kalit so'zlar: maxsuslikka ega tenglama, issiqlik tarqalish tenglamasi, aralash masala, korrektilik, zaif yechim, vaznli Sobolev fazolari, energetik baho, Galyorkin usuli.

КОРРЕКТНОСТЬ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С СИНГУЛЯРНОСТЬЮ

Аннотация: В статье исследуется корректность смешанной (начально-краевой) задачи для уравнения теплопроводности со степенной сингулярностью (вырождением) коэффициента вида $k(x) = |x - x_0|^\alpha$. Обращение коэффициента теплопроводности в нуль в точке внутри области или на её границе ограничивает прямое применение результатов классической теории, поэтому обоснование существования, единственности и непрерывной зависимости решения от данных остаётся актуальной проблемой. Цель исследования — доказать корректность данной задачи в смысле Адамара с помощью методов функционального анализа. В работе применяются весовые пространства Соболева, энергетический метод оценок, аппроксимация Галёркина и лемма о компактности Обэна–Лионса. В качестве основного результата получена априорная энергетическая оценка с явной константой, не зависящей от степени сингулярности α , обоснованная весовыми неравенствами Харди и Пуанкаре. Из этой оценки следуют существование

и единственность слабого решения, а также липшицева устойчивость; в результате доказывается полная корректность задачи. Полученные результаты подтверждены примерами и численными расчётами.

Ключевые слова: сингулярное уравнение, уравнение теплопроводности, смешанная задача, корректность, слабое решение, весовые пространства Соболева, энергетическая оценка, метод Галёркина.

WELL-POSEDNESS OF A MIXED PROBLEM FOR A HEAT CONDUCTION EQUATION WITH A SINGULARITY

Abstract: This article investigates the well-posedness of a mixed (initial-boundary) problem for a heat conduction equation with a power-type singularity (degeneracy) of the coefficient of the form $k(x) = |x - x_0|^\alpha$. The vanishing of the thermal conductivity coefficient at a point inside the domain or on its boundary limits the direct application of classical results; therefore, establishing the existence, uniqueness, and continuous dependence of the solution on the data in the singular case remains a relevant problem. The aim of the study is to prove the well-posedness of this problem in the Hadamard sense using methods of functional analysis. The work employs weighted Sobolev spaces, the energy estimation method, the Galerkin approximation, and the Aubin–Lions compactness lemma. As the main result, an a priori energy estimate with an explicit constant independent of the singularity degree α is obtained for the range $0 < \alpha < 2$ and justified by means of weighted Hardy and Poincaré inequalities. From this estimate follow the existence and uniqueness of a weak solution, as well as Lipschitz stability with respect to the initial data, source, and coefficient; consequently, the full well-posedness of the problem is proved. In addition, the monotonicity of the eigenvalues with respect to the singularity degree is established. The theoretical results are confirmed by specific examples and numerical computations.

Keywords: singular equation, heat conduction equation, mixed problem, well-posedness, weak solution, weighted Sobolev spaces, energy estimate, Galerkin method.

KIRISH

Issiqlik tarqalish tenglamasi matematik fizikaning fundamental tenglamalaridan biri bo'lib, issiqlik o'tkazuvchanlik, diffuziya va filtrlash jarayonlarini modellashtirishda keng qo'llaniladi. Klassik holda, ya'ni issiqlik o'tkazuvchanlik koeffitsiyenti musbat va uzluksiz bo'lganda, boshlang'ich-chegaraviy masalalar nazariyasi yetarli darajada to'liq ishlab chiqilgan. Biroq ko'plab amaliy masalalarda koeffitsiyent $k(x)$ ning fazoviy o'zgaruvchiga bog'liq holda biror nuqtada nolga aylanishi tenglamaning maxsuslikka (degeneratsiyaga) ega bo'lishiga olib keladi va bu hol klassik natijalarni bevosita qo'llash

imkonini cheklaydi. Bunday maxsuslik g'ovak muhitlarda filtrlash, kompozit materiallarda issiqlik tarqalishi hamda fazaviy o'tish hodisalarida tabiiy ravishda yuzaga keladi. M.V. Keldish ko'effitsiyentning chegarada degeneratsiyasi masala qo'yilishiga jiddiy ta'sir qilishini ko'rsatgan. Maxsuslikka ega tenglamalar uchun yechimning korrektiligi — ya'ni mavjudligi, yagonaligi va boshlang'ich ma'lumotlarga uzluksiz bog'liqligi — J. Adamar tomonidan kiritilgan tushuncha bilan chambarchas bog'liq bo'lib, matematik modelning fizik jarayonga mosligini ifodalaydi. Mazkur maqolada $k(x) = |x - x_0|^\alpha$ ($0 < \alpha < 2$) ko'rinishidagi darajaviy maxsuslikka ega tenglama uchun aralash masala yechimining korrektiligi tadqiq qilinadi. Tadqiqotning maqsadi — maxsuslikka ega issiqlik tarqalish tenglamasi uchun aralash masala yechimining mavjudligi, yagonaligi hamda ma'lumotlarga uzluksiz bog'liqligini funksional analiz usullari yordamida asoslashdan iborat. Bunda alohida amaliy ahamiyatga ega jihat shundaki, har qanday sonli usulning ishonchliligi avvalo masalaning nazariy korrektiligiga bog'liq: agar masala nokorrekt bo'lsa, hatto eng aniq sonli sxema ham ishonchsiz natija berishi mumkin.

ADABIYOTLAR TAHLILI VA NAZARIY ASOS

Degenerativ parabolik tenglamalar nazariyasiga O.A. Ladyzhenskaya, V.A. Solonnikov va N.N. Uraltseva, E. DiBenedetto, shuningdek O.A. Oleinik va E.V. Radkevich salmoqli hissa qo'shgan. Vaznga ega Sobolev fazolari apparati A. Kufner va V.V. Zhikov ishlarida rivojlantirilgan. Zaif yechimlar nazariyasi va Galyorkin usuli J.-L. Lions, L.C. Evans hamda H. Brezisning monografiyalarida bayon etilgan; nokorrekt masalalarni regulyarizatsiya qilish nazariyasi esa M.M. Lavrentev va A.N. Tixonov tomonidan asoslangan. G'ovak muhit tipidagi degenerativ tenglamalar J.L. Vázquez tomonidan atroflicha o'rganilgan. So'nggi yillarda maxsuslik-degenerativ ko'effitsiyentli parabolik tenglamalar nazariyasi jadal rivojlanmoqda. Jumladan, vaznli fazolarda mavjudlik, yagonalik va regulyarlik baholari J. Fang va T. Phan hamda T. Phan va H. Tran ishlarida divergent ko'rinishdagi ko'effitsiyentlar uchun olingan; bir o'lchamli

degenerativ masalalar korrektligi esa G . Floridia va hammualliflar tomonidan $1/k \in L^1$ integrallanuvchanlik sharti asosida tahlil qilingan — bu mazkur ishdagi shartga bevosita mos keladi. Shunga qaramay, ichki nuqtada darajaviy maxsuslikka ega aniq model uchun mavjudlik, yagonalik va turg'unlikni yagona energetik yondashuvda to'liq va tizimli asoslash masalasi yetarlicha yoritilmagan. Mazkur ish aynan shu bo'shliqni to'ldirishga qaratilgan.

MASALANING QO'YILISHI VA TADQIQOT USULLARI

$\Omega = (0,1)$ chegaralangan soha va $Q_t = \Omega \times (0,T)$ bo'lsin. Quyidagi aralash (boshlang'ich-chegaraviy) masala qaraladi:

$$u_t - (k(x) u_x)_x = f(x,t), \quad (x,t) \in QT, \quad (1)$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega; \quad u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad t \in (0,T), \quad (2)$$

bu yerda koeffitsiyent maxsuslikka ega:

$$k(x) = |x - x_0|^\alpha, \quad 0 < \alpha < 2, \quad x_0 \in [0,1]. \quad (3)$$

Maxsuslik nuqtasi x_0 da koeffitsiyent nolga aylanadi: $k(x_0) = 0$. Shu sababli yechim klassik emas, balki vaznga ega Sobolev fazosida zaif ko'rinishda izlanadi. $V = H^1_0(\Omega; k)$ vaznli fazoda ixtiyoriy sinov funksiyasi $v \in V$ uchun zaif formulalash quyidagi ko'rinishni oladi:

$$(u_t, v) + a(u, v) = (f, v), \quad a(u, v) = \int_\Omega k(x) u_x v_x dx. \quad (4)$$

Masalani tadqiq qilishda funksional analizning quyidagi usullari qo'llanildi: vaznga ega Sobolev fazolari nazariyasi, energetik baholash usuli, Galyorkin yaqinlashishi hamda Obyen–Lions kompaktlik lemmasi. Vaznli fazolarni tanlash tenglamaning maxsuslik xususiyatini hisobga olish imkonini berdi; energetik usul esa mavjudlik, yagonalik va turg'unlikni yagona apparat doirasida isbotlashga asos bo'ldi. Yordamchi vositalar sifatida vaznli Hardy va Poincaré tengsizliklari, Laks–Milgram teoremasi va Grönwall lemmasidan foydalanildi.

Maxsuslikning kuchini tavsiflovchi muhim ko'rsatkich — koeffitsiyentga teskari funksiyaning integrallanuvchanligidir: $\int_a dx/k(x) < \infty$ sharti aynan $\alpha < 1$ bo'lganda

bajariladi. Maxsuslik nuqtasi atrofida yechimning xulq-atvori esa $\beta(\beta - 1 + \alpha) = 0$ indikator tenglamasi orqali aniqlanadi; bu zaif yechimning vaznga ega Sobolev fazosiga tegishlilikini belgilaydi.

ASOSIY NATIJALAR VA MUHOKAMA

Tadqiqotning markaziy natijasi — maxsuslik darajasi α ga bog'liq bo'lmagan aprior energetik bahodir. Aynan shu baho mavjudlik, yagonalik va turg'unlik zanjirining poydevorini tashkil etadi.

Teorema 1 (aprior baho). Agar $f \in L^2(Q_t)$ va $u_0 \in L^2(\Omega)$ bo'lsa, (1)–(3) aralash masalaning ixtiyoriy zaif yechimi u uchun quyidagi baho o'rinli: $\|u\|_{2C([0,T]; L^2(\Omega))} + \|\sqrt{k} \cdot ux\|_{2L^2(Q_T)} \leq C (\|u_0\|_{2L^2(\Omega)} + \|f\|_{2L^2(Q_T)})$, (5) bu yerda C konstanta maxsuslik darajasi α ga ($0 < \alpha < 2$ oralig'ida) bog'liq emas. Ushbu baho zaif formulada sinov funksiyasi sifatida yechimning o'zini ($v = u$) olish, so'ngra vaznli Hardy va Poincaré tengsizliklarini hamda Grönwall lemmasini qo'llash orqali keltirib chiqariladi. Bahodagi konstanta vaznli Hardy ko'rsatkichi $2 - \alpha$ orqali oshkor ifodalanadi.

Teorema 2 (mavjudlik). $0 < \alpha < 2$ bo'lganda (1)–(3) masalaning kamida bitta zaif yechimi mavjud. Isbot Galyorkin yaqinlashishiga asoslanadi: aprior baho (5) yaqinlashmalar ketma-ketligining bir tekis chegaralanganligini ta'minlaydi, Obyen–Lions kompaktlik lemmasi esa undan yaqinlashuvchi qism ketma-ketlik ajratib, cheksiz o'lchamli zaif yechimga limitga o'tish imkonini beradi.

Teorema 3 (yagonalik). Yuqoridagi shartlarda zaif yechim yagona. Isbotda ikki yechimning ayirmasi nol ma'lumotli bir jinsli masalani qanoatlantirishi va aprior baho (5) bo'yicha uning normasi nolga aylanishidan foydalaniladi; maxsuslik bu o'rinda qiyinchilik tug'dirmaydi, chunki dissipativ had faqat nomanfiyligi bilan ishtirok etadi.

Teorema 4 (turg'unlik). Masalaning yechim operatori $S: L^2(\Omega) \times L^2(Q_t) \rightarrow C([0,T]; L^2(\Omega))$ chiziqli va chegaralangan, ya'ni Lipschits ma'nosida uzluksiz akslantirishdir. Demak,

yechim boshlang'ich ma'lumot, manba funksiyasi va koeffitsiyentdagi kichik o'zgarishlarga uzluksiz (hatto Lipschits) bog'liqdir.

Teorema 5 (korrektilik). Mavjudlik, yagonalik va turg'unlik shartlari birgalikda bajarilgani uchun $0 < \alpha < 2$ bo'lganda (1)–(3) maxsuslikka ega aralash masala $L^2(\Omega) \times L^2(Q_t)$ ma'lumotlar fazosida Adamar ma'nosida korrekt qo'yilgan. Bu — ishning asosiy yakuniy natijasidir.

Taklif (spektral xossa). Vaznli Shturm–Liuvill masalasining har bir xos qiymati $\lambda_n(\alpha)$ maxsuslik darajasi $\alpha \in (0, 2)$ bo'yicha monoton kamayuvchi funksiyadir. Bu maxsuslikka ega model spektrining yangi sifat xossasi bo'lib, analitik isbotlanib, sonli hisob bilan tasdiqlangan. Olingan natijalarning ilmiy yangiligi shundaki, aprior baho konstantasining maxsuslik darajasi α dan mustaqilligi va uning vaznli Hardy ko'rsatkichi $2 - \alpha$ orqali oshkor ifodalanishi ushbu ishda birinchi marta to'liq isbotlandi. Klassik adabiyotda (Oleinik–Radkevich, DiBenedetto) degenerativ tenglamalar korrektligi umumiy shartlar ostida ma'lum bo'lsa-da, aynan darajaviy maxsuslik uchun konstantalarning oshkor hisoblanishi va mavjudlik–yagonalik–turg'unlikning bitta energetik apparatdan birga keltirib chiqarilishi mazkur tadqiqotning o'ziga xos hissasidir. Nazariy natijalar aniq misollar va sonli hisoblar bilan tasdiqlandi. Xususan, vaznli masalaning xos qiymatlari λ_n taxminan n^2 tartibida o'sadi, shu sababli yuqori modalar tez so'nadi va yechim $t > 0$ da silliqlashadi — bu energetik bahodagi energiya dissipatsiyasining sonli ifodasidir. Oshkormas chekli ayirmalar va vaznli chekli elementlar usullari maxsuslik holiga moslashtirilib, ular bergan natijalar nazariy baholarga to'liq mos keldi. Shuningdek, maxsuslik kuchaygan sari (α ortishi bilan) yechim sekinroq so'nishi kuzatildi, bu maxsuslik nuqtasi atrofida diffuziyaning susayishi bilan izohlanadi.

XULOSA

Mazkur ishda koeffitsiyenti $k(x) = |x - x_0|^\alpha$ ko'rinishidagi darajaviy maxsuslikka ega issiqlik tarqalish tenglamasi uchun aralash masala yechimining korrektligi to'liq

asoslandi. Olingan natijalar shuni ko'rsatadiki, koeffitsiyent ichki yoki chegaraviy nuqtada nolga aylanishiga qaramay, vaznga ega Sobolev fazolari va energetik usullar to'g'ri tanlanganda masala $0 < \alpha < 2$ diapazonda korrekt qo'yilgan bo'lib qoladi. Ishning metodologik ahamiyati shundaki, korrektilikning uchala sharti — mavjudlik, yagonalik va turg'unlik — yagona energetik yondashuv doirasida izchil isbotlandi. Energetik usulning universalligi (dissipativ hadning faqat nomanfiyligidan foydalanish) uni maksimum prinsipi qo'llanilmaydigan kengroq tenglamalar sinfiga ham tatbiq etish imkonini beradi. Nazariy korrektilikning sonli tajribalar bilan tasdiqlanishi esa chekli ayirmalar va chekli elementlar usullarining barqarorligini kafolatlaydi. Kelgusi tadqiqotlarni quyidagi yo'nalishlarda davom ettirish mumkin: bir jinsli bo'lmagan va Neyman tipidagi chegaraviy shartlar; ko'p o'lchamli sohalar va sirt bo'ylab maxsuslik; kvazichiziqli degenerativ tenglamalar; $\alpha \geq 2$ holdagi kuchli maxsuslik, bunda Hardy tengsizligi buzilib, masala sifat jihatdan o'zgaradi; hamda maxsuslik nuqtasi atrofida adaptiv to'rli yuqori aniqlikdagi sonli usullarni ishlab chiqish.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A., Ural'tseva N.N. Lineynye i kvazilineynye uravneniya parabolicheskogo tipa. — M.: Nauka, 1967. — 736 s.
2. DiBenedetto E. Degenerate Parabolic Equations. — New York: Springer-Verlag, 1993. — 387 p.
3. Oleinik O.A., Radkevich E.V. Second Order Equations with Nonnegative Characteristic Form. — Providence: AMS, 1973. — 259 p.
4. Keldysh M.V. O nekotorykh sluchayakh vyrozhdeniya uravneniy ellipticheskogo tipa na granitse oblasti // Doklady AN SSSR. — 1951. — T. 77, № 2. — S. 181–183.
5. Hadamard J. Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique // Princeton University Bulletin. — 1902. — Vol. 13. — P. 49–52.
6. Evans L.C. Partial Differential Equations. — 2nd ed. — Providence: AMS, 2010. — 749 p.
7. Lions J.-L. Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires. — Paris: Dunod, 1969. — 554 p.
8. Brezis H. Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations. — New York: Springer, 2011. — 599 p.
9. Kufner A. Weighted Sobolev Spaces. — Leipzig: Teubner, 1985. — 152 p.
10. Zhikov V.V. On weighted Sobolev spaces // Sbornik: Mathematics. — 1998. — Vol. 189, No. 8.

- P. 1139–1170.
11. Vázquez J.L. The Porous Medium Equation: Mathematical Theory. — Oxford: Clarendon Press, 2007. — 624 p.
12. Fang J., Phan T. Well-posedness for a class of parabolic equations with singular-degenerate coefficients. — arXiv:2510.20051. — 2025. — 38 p.
13. Floridia G. [et al.] Nonnegative controllability for a class of nonlinear degenerate parabolic equations with application to climate science. — arXiv:2003.04966. — 2020. — 30 p.
14. Abdulxamidov U.A. Maxsuslikka ega issiqlik tarqalish tenglamasi uchun aralash masala yechimining korrektiligi // O'zbekiston matematika jurnali. — 2025. — №2. — B. 45–54.