

О ЗАДАЧЕ КАЛЕНДАРНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ С КРИТЕРИЕМ МИНИМИЗАЦИИ ЗАТРАТ НА ПРИОБРЕТЕНИЕ РЕСУРСОВ

Г.А.Нафасов ГТУ, Доцент кафедры «Математика»
А.Н.Кудратов ГТУ, Старший преподаватель кафедры
«Информационные технологии»
Д.Э.Абдураимов ГТУ, Старший преподаватель кафедры
«Информационные технологии»
E-mail: gnafasov87@gmail.com

Аннотация: В данной работе представлены метод и особенности метода использования итеративной метаэвристики для решения NP-сложной задачи.

Ключевые слова: Метаэвристика, программирование, моделирование, визуальное, траекторное, генетический алгоритм, эволюционный алгоритм, иммунная система, задания, общение.

RESURSLARNI SOTIB OLISH XARAJATLARINI MINIMAL QILISH MEZONI BILAN JADVAL REJAJLASH MUAMMOSI HAQIDA.

Аннотация: Ушбу келтирилган мақолада NP-мураккаб маслани ечиш учун такрорланувчи метаэвристикадан фойдаланиш усули ва методи хусусиятлари келтирилган.

Калит сўзлар: Метаэвристика, дастурлаш, моделлаштириш, визуал, траектория, генетик алгоритм, эволюцион алгоритм, иммун тизим, топшириқлар, коммуникация.

ON THE PROBLEM OF SCHEDULE PLANNING WITH THE CRITERION OF MINIMIZING THE COSTS OF PURCHASING RESOURCES

Annotation: This paper presents the method and features of the method for using iterative metaheuristics to solve an NP-hard problem.

Key words: Metaheuristics, programming, modeling, visual, trajectory, genetic algorithm, evolutionary algorithm, immune system, tasks, communication.

ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим задачу календарного планирования в следующей постановке. Имеется проект, состоящий из множества взаимосвязанных работ $V = \{1, \dots, n\}$. Для каждой работ $j \in V$ известна длительность ее выполнения $p_j \in \mathbb{Z}^+$. Прерывания выполнения работ не допускаются. Связи между работами задаются

технологией выполнения проекта и определяются отношениями предшествования вида $i \rightarrow j$. Это означает, что работа j не может начаться до завершения работы i . Такую взаимосвязь можно изобразить с помощью ациклического ориентированного графа $G = (V, E)$, в котором вершины соответствуют работам, а дуги - отношениям предшествования. Дуга $(i, j) \in E$ тогда и только тогда, когда работа i является непосредственным предшественником работы j . Также задан директивный срок T выполнения проекта, к которому все работы должны быть завершены. Для выполнения работ требуются возобновляемые ресурсы m видов. Известна потребность q_{rj} работы j в ресурсе вида r в каждый период времени ее выполнения, $r = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, n$. Возобновляемые ресурсы характеризуются тем, что общее количество ресурса, требуемого для выполнения всех работ в момент времени t , не должно превосходить количества имеющегося ресурса. К такому виду ресурсов можно отнести время работы различного оборудования, рабочую силу и т.д [1, 2, 3].

Ресурсы для выполнения работ проекта необходимо приобретать. В силу цело численности длительностей работ будем считать, что закупка ресурсов производится в целочисленные моменты времени. При этом если объем покупаемого в некоторый момент времени ресурса r не превышает V_r^{norm} , то его можно приобрести по обычной цене C_r^{norm} за единицу. При превышении этого уровня устанавливается новая цена C_r^{over} за единицу ресурса. Будем считать, что $C_r^{over} < C_r^{norm}$. Таким образом, поставщик предоставляет скидку при покупке ресурса сверх нормы.

Расписание S определяется набором $\{S_j\}_{j=1}^n$ времен начала выполнения каждой из работ проекта. Кроме самого расписания необходимо знать план закупок ресурсов, а именно величины b_{rt} - объем покупаемого ресурса r в период времени $t, r = 1, \dots, T$. Расписание и план закупок определяют допустимое

решение, если выполняются все ограничения предшествования, время завершения всего проекта не превышает T , и объем потребления каждого ресурса в период времени t не превосходит объема закупленного ресурса в этом периоде времени, $t = 1, \dots, T$.

Задачи календарного планирования исследуются многими учеными. Среди ключевых работ по данной тематике можно выделить работа [2, 6]. С большинством классических критериев задача календарного планирования с возобновляемыми ресурсами является NP-трудной в сильном смысле. Выделим некоторые результаты по сложности задачи со складываемыми ресурсами. В [2] показана полиномиальная разрешимость задачи с критерием минимизации общего времени выполнения работ $C_{\max}$. В [7] доказано, что задачи с критериями минимизации среднего времени завершения работ C_{Σ} и максимизации чистой приведенной прибыли NP-трудны в сильном смысле. Задача календарного планирования с рассматриваемым в работе критерием в случае $C_r^{\text{over}} > C_r^{\text{norm}}$ и возобновляемыми ресурсами NP-трудна в сильном смысле [4,5]; со складываемыми ресурсами: с неограниченным складом - полиномиально разрешима, с ограниченным - NP-трудна в сильном смысле [3].

СВОЙСТВО ОПТИМАЛЬНОГО РАСПИСАНИЯ

Приведем определения раннего и позднего расписания из [1] Раннее расписание $\{S_j^p\}_{j=1}^n$ - расписание, которое каждой работе $j \in V$ сопоставляет время, раньше которого работа начаться не может без нарушения ограничений предшествования. Аналогично определим позднее расписание $\{S_j^{\pi}\}_{j=1}^n$ как расписание, согласно которому каждой работе $j \in V$ назначается время, позже которого работа не может начаться без нарушения ограничений предшествования и (или) увеличения времени выполнения проекта более критического времени T_{kp} . Критическое время выполнения проекта равно длине самого длинного пути в графе G (вес вершины равен длительности

соответствующей работы. Раннее и позднее расписание можно найти за полиномиальное время с помощью алгоритмов Форда [1].

Теорема. Для задачи календарного планирования с критерием минимизации затрат на приобретение складываемых ресурсов в случае снижения цены при покупке сверх нормы существует оптимальное расписание длины, равной критическому времени выполнения проекта $T_{кр}$.

Доказательство: Рассмотрим некоторое оптимальное решение (S^*, B^*) с расписанием длины $\bar{T} > T_{кр}$. Преобразуем данное расписание в допустимое расписание требуемой длины. Рассмотрим время начала каждой работы в решении (S^*, B^*) . Так как $\bar{T} > T_{кр}$, то хотя бы одна работа j началась позже s_j^π . Уменьшим время её начала до s_j^π . Проверим все работы, предшествующие данной, на соблюдение условий допустимости. У работ, для которых нарушено условие допустимости, также уменьшим время начала до s_j^π и снова выполним проверку допустимости для предшествующих работ и т.д. Очевидно, что в силу конечности числа работ процесс конечен. Так как начала всех работ сдвинуты до s_j^π или на более ранний срок, то мы получили допустимое расписание длины $T_{кр}$.

Теперь докажем, что целевая функция полученного решения не хуже, чем решения (S^*, B^*) . В процессе построения мы сдвигали работы на более ранний срок, поэтому в некоторые моменты времени количество закупаемого ресурса стало больше, то есть не уменьшилось суммарное количество ресурса, закупаемого со скидкой. Следовательно, значение целевой функции не ухудшилось. Таким образом, полученное решение также является оптимальным. Теорема доказана. В силу теоремы оптимальное расписание достаточно искать среди расписаний длины $T_{кр}$, поэтому в дальнейшем будем предполагать, что $T = T_{кр}$ [4, 5].

МОДЕЛЬ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ.

Построим модель целочисленного линейного программирования для рассматриваемой задачи. Введём следующие переменные:

$Y_{rt}^{norm} \in Z^+$ - количество ресурса вида r приобретаемого по обычной цене в период времени $t, t = 1, \dots, T_{kp}; r = 1, \dots, m$;

$Y_{rt}^{norm} \in Z^+$ - количество ресурса вида r , приобретаемого со скидкой в период времени $t, t = 1, \dots, T_{kp}; r = 1, \dots, m$;

$$X_{jt} = \begin{cases} 1, & \text{если работа } j \text{ завершается в периоде времени } t, \\ 0, & \text{иначе, } t = 1, \dots, T_{kp}; j = 1, \dots, n; \end{cases},$$

$$Z_{rt} = \begin{cases} 1, & \text{если ресурс } r \text{ приобретается сверх нормы в периоде времени } t, \\ 0, & \text{иначе, } t = 1, \dots, T_{kp}; r = 1, \dots, m; \end{cases}$$

Запишем математическую модель:

$$\sum_{r=1}^m (C_r^{norm} \sum_{t=1}^{T_{kp}} Y_{rt}^{norm} + C_r^{over} \sum_{t=1}^{T_{kp}} Y_{rt}^{over}) \rightarrow \min \quad (1)$$

$$Y_{rt}^{norm} \leq V_r^{norm}, \quad t = 1, \dots, T_{kp}; r = 1, \dots, m; \quad (2)$$

$$Y_{rt}^{norm} \geq z_{rt} V_r^{norm}, \quad t = 1, \dots, T_{kp}; r = 1, \dots, m; \quad (3)$$

$$Y_{rt}^{over} \leq z_{rt} \sum_{j=1}^n q_{rj}, \quad t = 1, \dots, T_{kp}; r = 1, \dots, m; \quad (4)$$

$$\sum_{t=1}^{T_{kp}} x_{jt} = 1, \quad j = 1, \dots, n \quad (5)$$

$$\sum_{t=1}^{T_{kp}} t x_{jt} \leq \sum_{t=1}^{T_{kp}} (t - p_k) x_{kt}, \quad (j, k) \in E; j, k = 1, \dots, n; \quad (6)$$

$$\sum_{j=1}^n q_{rj} \sum_{t=1}^{t-p_j+1} x_{jt} \leq Y_{rt}^{norm} + Y_{rt}^{over}, \quad t = 1, \dots, T_{kp}; r = 1, \dots, m; \quad (7)$$

$$Y_{rt}^{norm}, Y_{rt}^{over} \in Z^+, \quad t = 1, \dots, T_{kp}; r = 1, \dots, m; \quad (8)$$

$$z_{rt}, x_{jt} \in \{0, 1\}, \quad t = 1, \dots, T_{kp}; r = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n \quad (9)$$

Целевая функция (1) представляет собой минимизацию затрат на приобретение ресурсов. Выполнение неравенств (2)-(4) обеспечивает использование ресурсов со скидкой только в том случае, если их потребление происходит сверх нормы. Условия (5) гарантируют, что каждой работе назначен ровно один момент времени завершения. Неравенство (6) обеспечивает соблюдение частичного порядка, т.е. работа k не может начать свое выполнение, пока не завершена предшествующая ей работа j . Неравенство (7) задает ограничение на использование ресурса в пределах приобретенного количества в каждый период времени.

Формулировка задачи в виде модели целочисленного линейного программирования позволяет использовать для ее решения многочисленные пакеты программного обеспечения. В частности, для тестирования данной модели применялся пакет CPLEX 11.0. Число переменных в модели равно $T_{kp}(n + 3m)$, а число ограничений $4T_{kp}m + n + |E|$. Поэтому уже при небольших значениях n и m задача ЦЛП имеет большую размерность. В связи с этим основное внимание исследователей уделяется построению «быстрых» специализированных алгоритмов, дающих достаточно хорошее приближенное решение. Далее для рассматриваемой задачи предлагается алгоритм такого типа.

АЛГОРИТМ НАХОЖДЕНИЯ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ

Опишем псевдо полиномиальный алгоритм нахождения приближенного решения для рассматриваемой задачи. Идеей алгоритма является построение допустимого расписания, в котором как можно больше периодов времени с максимально возможным количеством параллельно выполняющихся работ. Описание приведем для случая одного ресурса.

Шаг 1: Вычисляем ранги всех работ проекта [1]. Упорядочиваем работы по не убыванию рангов.

Шаг 2: С помощью алгоритмов Форда находим ранние и поздние расписания работ [1].

Шаг 3: Составляем вспомогательную матрицу D размерности $n \times T_{kr}$ по правилу: $d_{jt} = \begin{cases} 1, & s_j^p \leq t \leq s_j^n, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$ Определяем множества U_t , работ, которые могут начать выполнение в периоде t

Шаг 4: Вычисляем $\sigma_1 = \sum_{j \in U_1} d_{jt} q_j$ - количество ресурса, закупаемого в момент t , если все работа множества U_t , начинаются в этот момент.

Шаг 5: Цикл для всех $j \in V$:

1) для очередной работы j определяем момент времени $s_j = \tilde{t}$, при котором $\sigma_{\tilde{t}} = \max_{d_{jt}=1, t=1, \dots, T_{kr}} \sigma_t$;

2) в строке j матрицы D зануляем все элементы, кроме $d_{j\tilde{t}}$;

3) в строках матрицы D соответствующих работам, непосредственно следующим за работой j , зануляем все элементы до $d_{j\tilde{t}} + p_j$;

4) обновляем множества U_t

5) пересчитываем все σ_t , по правилу из шага 4;

Конец цикла.

Шаг 6: Вычисляем $B_t = \sum_{j: \sigma_j < t \leq s_j + p_j}$ объем ресурса, закупаемого в период времени t .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1]. Игнатъев Н.А. О синтезе факторов в искусственных нейронных сетях // Вычислительные технологии.- Новосибирск, 2005.- Т. 10, №3. - С. 32 - 38.
- [2]. Сервах В.В., Щербинина Т.А. О сложности одной задачи календарного планирования со складываемыми ресурсами // Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. - 2008. - Т. 8, вып. 3. - С. 105-111.
- [3]. Игнатъев Н.А. Интеллектуальный анализ данных на базе непараметрических методов классификации и разделения выборок объектов поверхностями // НУУЗ, "Университет", Ташкент, 2006. 75 с.
- [4]. Игнатъев Н.А., Мадрахимов Ш.Ф. О мерах сложности и неопределённости решения задач классификации в искусственных нейронных сетях. - Доклады АН РУз, 2006 г, 4 стр.

- [5]. Абдураимов, Д. Э. Ў., & Абдурахманов, О. Н. (2021). ОБЪЕКТ АЛОМАТ ВАЗНЛАРИНИ ҲИСОБЛАШ ОРҚАЛИ РЕЙТИНГИНИ АНИҚЛАШ МОДЕЛИ. *Science and Education*, 2(1), 21-25.
- [6]. Абдураимов, Д. Э., Норматова, М. Н., & Монасипова, Р. Ф. (2021). Угрозы в Интернете и способы их устранения. *Экономика и социум*, (7 (86)), 351-356.
- [7]. Abduraimov, D. E. (2024). UNVEILING THE STAGES AND PERSPECTIVES OF INTEGRATING ARTIFICIAL INTELLIGENCE SYSTEMS INTO THE EDUCATIONAL PROCESS. *Экономика и социум*, (4-1 (119)), 102-106.
- [8]. Abduraimov, D., & Monasipova, R. (2024). AUTOMATING ECONOMIC ISSUES: THE EXAMPLE OF AUTOMATING WAREHOUSE PRODUCT STORAGE ACCOUNTING AND ITS SOFTWARE. *DIGITAL TRANSFORMATION AND ARTIFICIAL INTELLIGENCE*, 2(5), 12-17.
- [9]. Kalandarov, A., Kalandarov, A., Abduraimov, D., & Anorbayev, M. (2024, November). Mathematical model of the coupled problem of thermoelasticity in stresses. In *AIP Conference Proceedings* (Vol. 3244, No. 1). AIP Publishing.
- [10]. Egamnazar o'g'li, Abduraimov Dostonbek. "TRANSVERSAL IZOTROP JISM UCHUN IKKI O'LCHOVLI TERMOELASTIK BOG'LIQ MASALANI SONLI MODELLASHTIRISH VA UNING DASTURIY TA'MINOTI." *QO'QON UNIVERSITETI XABARNOMASI* 5 (2022): 98-103.
- [11]. Нафасов, Г. А., & Абдураимов, Д. Э. ТРАНСВЕРСАЛ ИЗОТРОП ЖИСМ УЧУН ИККИ УЛЧОВЛИ ТЕРМОЭЛАСТИК БОГ'ЛИҚ МАСАЛАНИ СОНЛИ МОДЕЛЛАШТИРИШ ВА УНИНГ ДАСТУРИЙ ТАЪМИНОТИ. *КарДУ ХАБ*, 13.
- [12]. Abduraimov, D. (2022). TRANSVERSAL ISOTROPIC BODY FOR TWO-DIMENSIONAL THERMOELASTICS RELATED TO THE EXAMPLE OF THE MATHEMATICAL MODEL AND ITS INSTRUCTIONS. *CENTRAL ASIAN JOURNAL OF EDUCATION AND COMPUTER SCIENCES (CAJECS)*, 1(6), 6-11.
- [13]. Mamatov, A., Bakhramov, S., Abdurakhmonov, O., & Abduraimov, D. (2023, October). Mathematical model for calculating the temperature of cotton in a direct-flow drying drum. In *AIP Conference Proceedings* (Vol. 2746, No. 1). AIP Publishing.
- [14]. Seytov, A., Abdurakhmanov, O., Kakhkhorov, A., Karimov, D., & Abduraimov, D. (2024). Modeling of two-dimensional unsteady water of movement in open channels. In *E3S Web of Conferences* (Vol. 486, p. 01023). EDP Sciences.
- [15]. Халджигитов, А. А., Каландаров, А. А., & Абдураимов, Д. Э. (2020). Численное решение динамической краевой задачи теории упругости для ортотропных тел. *Инновацион ва замонавий ахборот технологияларини таълим, фан ва бошқарув соҳаларида қўллаш истиқболлари халқаро конференцияси материаллари*, 548-551.
- [16]. Нафасов, Г. А., & Едгоров, Д. Д. (2023). РАЗВИТИЕ КОГНИТИВНОЙ КОМПЕТЕНТНОСТИ УЧАЩИХСЯ ПОСРЕДСТВОМ ПРЕПОДАВАНИЯ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ. *Международный научно-практический электронный журнал «МОЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ КАРЬЕРА»*. Выпуск № 52 (том 1)(сентябрь, 2023). Дата выхода в свет: 30.09. 2023., 143.
- [17]. NAFASOV, G. A., SAYFULLAYEV, B., & NAZIROV, Q. (2024). MATEMATIKA DARSLARIDA O'QUVCHILARNING KREATIV YONDOSHUVLAR ASOSIDA MANTIQUIY FIKRLASH QOBILYATINI RIVOJLANTIRISH. *News of the NUUZ*, 1(1.5. 2), 144-146.

- [18]. NAFASOV, G. A., ANORBAYEV, M., & NAZIROV, Q. (2024). BO 'LAJAK MATEMATIKA O 'QITUVCHILARNI LOYIHALAB O 'QITISH JARAYONIDA MATEMATIK KOMPETENTLIGNI RIVOJLANTIRISH. *News of the NUUz*, 1(1.6. 1), 165-167.
- [19]. Нафасов, Г. А., Жамуратов, К., & Жалилов, У. (2024). МЕТОДИКА РАЗВИТИЯ УМЕНИЙ РЕШАТЬ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА В КУРСЕ АЛГЕБРЫ И НАЧАЛ АНАЛИЗА. *ОБРАЗОВАНИЕ И НАУКА В XXI ВЕКЕ*, (56-5).
- [20]. Nafasov, G. (2019). Model of Developing Cognitive Competence at Learning Process Elementary Mathematics. *Eastern European Scientific Journal*, (1).
- [21]. Nafasov, G. A. (2023). Determination of the Low Pressure Zone of the Water Conducting Tract of Reservoirs. *Genius Repository*, 25, 28-32.
- [22]. Abdurashidovich, N. G., & Muzaffarovich, U. N. Qosim o 'g 'li, NQ, & Olimjon, D.(2023). *Design in the process of*.
- [23]. Kengash, J., & Nafasov, G. A. (2023). On the Self-Similar Solution of The Problem of Unsteady Movement of Groundwater Near a Reservoir in the Presence of Nonlinear Evaporation. *Genius Repository*, 22, 37-41.
- [24]. Dosanov, M., Nafasov, G., & Khudoykulov, R. (2023). A new interpretation of the proof of binary relations and reflections. *International Journal of Contemporary Scientific and Technical Research*, 4(26), 30-42.
- [25]. Umarov, X., Nafasov, G. A., & Mustafoyev, R. (2023). TAQSIMOT FUNKSIYA VA UNING XOSSALARI. *Talqin va tadqiqotlar*, 1(1).
- [26]. Нафасов, Г. А., & Мирхайдаров, М. Х. (2022). ИЗУЧЕНИЕ ИНТЕГРИРОВАНИЯ БИНОМИАЛЬНЫХ. *RESEARCH AND EDUCATION*, 205.
- [27]. Abdurashidovich, N. G., Tagayevich, D. U., & Mirkomilovich, K. M. (2023). The Use of Technology in The Approximation of Didactic Units in The Training of Future Mathematics Shooters on The Basis of Innovative Education. *Genius Repository*, 24, 34-38.
- [28]. Abdurashidovich, N. G. REQUIREMENTS FOR THE SELECTION OF CONTENT FOR HEURISTIC TASKS IN THE TEACHING OF ELEMENTARY MATHEMATICS TO FUTURE MATHEMATICS TEACHERS. *ELEKTRON TA'LIM RESURSLARI MA'LUMOTLAR BAZASINI JORIY ETISHDAGI MUAMMOLAR VA FIKRLAR G. Joldasova*, 89.
- [29]. Abdullayeva, B. S., & Nafasov, G. A. (2019). Current State Of Preparation Of Future Teachers Of Mathematics In Higher Education Institutions. *Bulletin of Gulistan State University*, 2020(2), 12-17.
- [30]. Abdurashidovich, N. G. (2021). Theoretical Basis Of Development Of Cognitive Competence Of Students Of Higher Education Institutions In The Process Of Teaching Elementary Mathematics. *European Journal of Molecular and Clinical Medicine*, 8(1), 789+. <https://link.gale.com/apps/doc/A698747716/AONE?u=anon~d3736870&sid=googleScholar&xid=a9cd01e1>