MATEMATIK OLIMPIADA MASALALARINI YECHISHDA ANALITIK GEOMETRIYA METODLARINING O'RNI

[1]Akkulova Yulduz Alimovna,
[2]Umarov Xabibullo Raxmatullayevich,
[3]Xudoyqulov Rustamjon O'ktam o'g'li
[1]TKTI Yangiyer filiali "Raqamli texnologiyalar" kafedrasi dotsenti, e-mail: akkulovayulduz75@gmail.com
[2]Guliston davlat universiteti katta o'qituvchisi, e-mail: umarovhr@mail.ru
[3]Guliston davlat universiteti katta o'qituvchisi, e-mail: xudoyqulovrustam90@gmail.com

Annotatsiya: *Ushbu maqolada matematikadan olimpiada masalalarini yechishda analitik geometriyaning ba'zi metodlaridan foydalanish usullari ko'rsatib berilgan.*

Kalit so'zlar: *olimpiada masalalari, olimpiada, mantiqiy fikrlash, analitik geometriya, geometrik metod.*

РОЛЬ МЕТОДОВ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ В РЕШЕНИИ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОЛИМПИАД

Аннотация: *В данной статье показано, как использовать некоторые методы аналитической геометрии при решении математических олимпиадных задач.*

Ключевые слова: *олимпиадные задачи, олимпиада, логическое мышление, аналитическая геометрия, геометрический метод.*

THE ROLE OF ANALYTICAL GEOMETRY METHODS IN SOLVING MATHEMATICAL OLYMPIAD PROBLEMS

Abstract: *This article shows how to use some methods of analytical geometry in solving mathematical Olympiad problems.*

Key words: *Olympiad problems, Olympiad, logical thinking, analytical geometry, geometric method.*

KIRISH

Ta'lim muassasalarida matematika o'qitishning asosiy vazifasi o'quvchi yoshlarni vatanga sadoqat, yuksak ahloq, ma'naviy boylikka ega bo'lish va mehnatga vijdonan munosabatda bo'lish ruhida tarbiyalashga qaratilgan. Ta'limning insonparvar bo'lishiga erishish, hozirgi zamon bozor iqtisodiyoti sharoitlarini hisobga olib har bir jamiyat a’zosini mehnat faoliyati va kundalik hayoti uchun zarur matematik bilim, ko‘nikma va malakani berishdan iborat.

So‘nggi yillarda xalqaro olimpiadalarda bilimli, iqtidorli yoshlarimiz muvaffaqiyati yildan-yilga yaxshilanib bormoqda. Biz yoshlarimizni bundan ham yuqori natijalarga erishib, davlatimiz obro‘–e’tiborini yanada oshiradi degan umiddamiz. Bizning maqsadimiz yosh avlodni layoqati, qobiliyati, iqtidorini aniqlash, ochish va ularning rivojlanishi uchun imkoniyat yaratishdan iboratdir.

Zero, olimpiada masalalari elementar va oliy matematikaning eng jozibador masalalar to‘plamidir. Olimpiada masalalari o‘quvchini chuqur fikrlashga, o‘z ustida ishlab, iqtidorini-malakasini takomillashtirishga, boy ijodiy tafakkurga ega bo‘lishga, qat’iyatli inson bo‘lishga va qaror qabul qila olishga o‘rgatadi.

Ma’lumki, olimpiada masalalari o‘quvchilarni mantiqiy fikrlash bilan birga o‘z xulosalarini asoslashga undaydi. Masalalarni yechish davomida o‘quvchilar nazariy bilimlarni takrorlaydi va uni amaliy jihatdan qo‘llash ko‘nikmasiga ega bo‘ladi. Matematikadan olimpiada masalalarini yechishda matematik analiz metodlaridan foydalanishni o‘rganish va ulardan foydalanish yo‘llarini topish o‘quvchilarni matematikaga bo‘lgan qiziqishlarini orttiradi. Ushbu ishda matematikadan olimpiada masalalarini yechishda analitik geometriya metodlarining o‘rni va tatbiqlarini keltirishni maqsad qilib oldik. Shuningdek, ushbu analitik geometriyani masalalar yechishga tatbiq qilishga doir misollar yechimi uslubiyatini ko‘rsatiladi hamda uchburchak metrik munosabatlari bilan bog‘liq murakkab masalalar yechimlari o‘rganiladi.

METODOLGIYA

Ushbu ish – matematikadan olimpiada masalalarini yechishda analitik geometriya metodlaridan foydalanishni o‘rganish va ulardan foydalanish yo‘llarini topishga hamda ularga doir turli masalalarning yechish uslubiyatiga bag‘ishlangan.

1.Pifagor teoremasining tatbiqlari. Pifagor teoremasini 100 dan ortiq turli xil isbotlari mavjud. Ushbu bandda Pifagor teoremasini qo‘llanilishi sohasi naqadar kengligini ko‘rish mumkin.

1–masala. ABC uchburchakning CA, CB tomonlariga va unga tashqi chizilgan aylanaga urinuvchi aylananing radiusi r^* uchun

$$r^* = \frac{ab}{p}\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}} \qquad (1)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi. Bunda $a=|BC|$, $b=|AC|$, $c=|AB|$ bo‘lib, p – uchburchakning yarim perimetri.

Yechish: ABC uchburchak o‘tmas burchakli ($\angle C > 90^{\circ}$) bo‘lgan holda isbotlaymiz. ABC uchburchakka tashqi chizilgan aylana markazi O_2, CA, CB va uchburchakka tashqi chizilgan aylanaga urinuvchi aylana markazi O_1 bo‘lsin. Bu aylana AC tomonga N nuqtada urinsin. $O_2P \perp CA$, $O_1K \perp O_2P$ kesmalarni o‘tkazamiz (1-chizmaga qarang). $\angle A = \alpha$, $\angle C = \beta$ bo‘lsin. U holda

$$tg\frac{\gamma}{2} = \frac{O_1N}{CN} = \frac{r^*}{CN}.$$

Bundan

$$CN = r^* ctg\frac{\gamma}{2} = r^*\frac{1+\cos\gamma}{\sin\gamma} = r^*\frac{1+\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}{\sin\gamma} =$$

$$= r^*\frac{(a+b-c)(a+b+c)}{2ab\sin\gamma} = r^*\frac{4(p-c)p}{4S_{\Delta ABC}} = r^*\sqrt{\frac{p(p-c)}{(p-a)(p-b)}}.$$

O_1KO_2 uchburchakda $O_1O_2 = R - r^*$,

$$O_1K = CN - CP = r^*\sqrt{\frac{p(p-c)}{(p-a)(p-b)}} - \frac{a}{2},$$

$$O_2K = O_2P - r^* = \sqrt{R^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} - r^*.$$

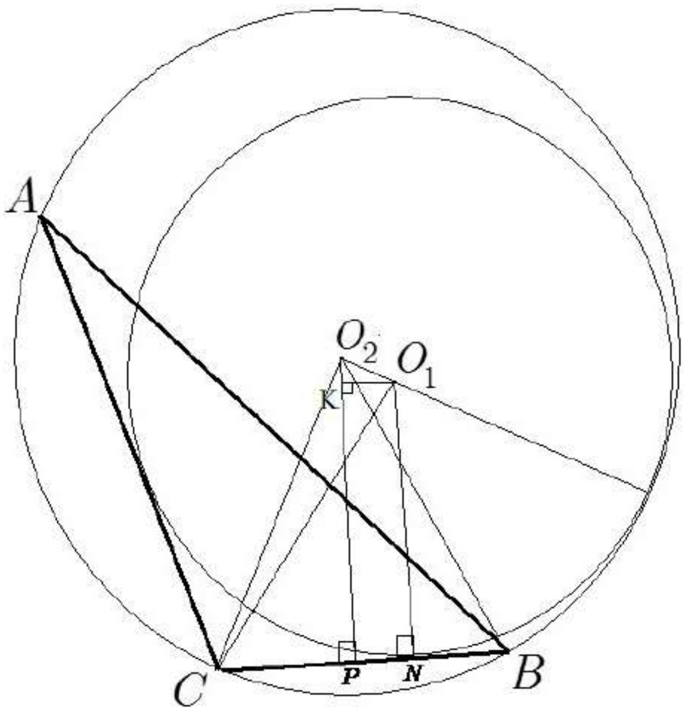
Bunda R – uchburchakka tashqi chizilgan aylana radiusi.

Endi ΔO_1KO_2 uchun Pifagor teoremasini qo‘llaymiz:

$$(O_1K)^2 + (O_2K)^2 = (O_1O_2)^2,$$

ya’ni

$$\left(\sqrt{R^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}-r^*\right)^2+\left(r^*\sqrt{\frac{p(p-c)}{(p-a)(p-b)}}-\frac{a}{2}\right)^2=\left(R-r^*\right)^2. \qquad (2)$$



1-chizma

Endi ba'zi shakl almashtirishlarni bajaramiz:

1. $$\sqrt{R^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\sqrt{R^2-R^2\sin^2\alpha}=R\left|\cos\alpha\right|=R\,\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=$$

$$R\left(\frac{(b-c)^2-a^2}{2bc}+1\right)=R\left(1-\frac{2(p-b)(p-c)}{bc}\right).$$

2. $$\frac{4R(p-b)(p-c)}{bc}=\frac{abc}{S_{\Delta ABC}}\cdot\frac{(p-b)(p-c)}{bc}=a\cdot\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}.$$

(2) tenglikdan

$$-2\sqrt{R^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}+r^*\frac{p(p-c)}{(p-a)(p-b)}-a\sqrt{\frac{p(p-c)}{(p-a)(p-b)}}=-2R$$

tenglik hosil bo‘ladi. Bundan

$$-2R\left(1-\frac{2(p-b)(p-c)}{bc}\right)+r^*\frac{p(p-c)}{(p-a)(p-b)}-a\sqrt{\frac{p(p-c)}{(p-a)(p-b)}}=-2R$$

$$\frac{4R(p-b)(p-c)}{bc}+r^*\frac{p(p-c)}{(p-a)(p-b)}-a\sqrt{\frac{p(p-c)}{(p-a)(p-b)}}=0$$

$$a\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}+r^*\frac{p(p-c)}{(p-a)(p-b)}-a\sqrt{\frac{p(p-c)}{(p-a)(p-b)}}=0$$

$$r^*\frac{p(p-c)}{(p-a)(p-b)}=a\sqrt{\frac{p-c}{p-a}}\left(\sqrt{\frac{p}{p-b}}-\sqrt{\frac{p-b}{p}}\right),$$

$$r^*=\frac{ab}{p}\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}.$$

Demak, (1) tenglik o‘rinli.

ABC uchburchak to‘g‘ri burchakli yoki o‘tkir burchakli bo‘lsa ham (1) formula o‘rinli bo‘ladi. Tenglik isbotlandi.

1-izoh: Agar *ABC* uchburchak to‘g‘ri burchakli bo‘lsa, (1) tenglikdan

$$r^*=a+b-c$$

kelib chiqadi.

2-izoh: *ABC* uchburchakka ichki chizilgan aylananing radiusi r bo‘lsa, (1) tenglik

$$r^*=\frac{abr}{p(p-c)}$$

ko‘rinishni oladi.

2–masala. Markazi A, B, C nuqtalarda va radiuslari mos ravishda a, b, c ga teng bo‘lgan aylanalar tashqi tomondan o‘zaro urinadi. Bu aylanalar bilan chegaralangan shaklga eng katta r radiusli aylana ichki chizilgan bo‘lsa,

$$r = \frac{abc}{ab + bc + ac + 2\sqrt{abc\left(a + b + c\right)}}$$

formula o'rinli bo'ladi.

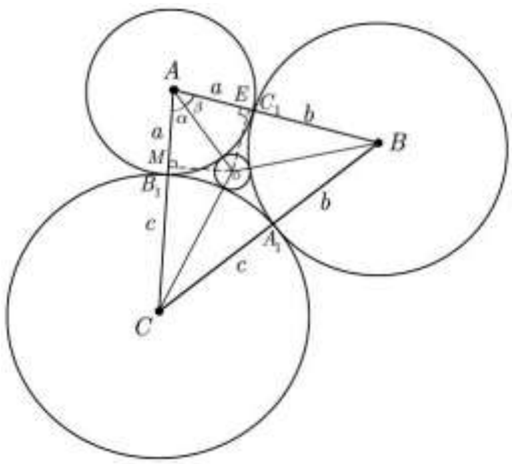
Yechish. Umumiylikka zid ish qilmagan holda $a \le b,\ a \le c$ deb hisoblaymiz. Bu aylanalarning o'zaro urinish nuqtalari A_1, B_1, C_1 bo'lib, biz izlayotgan aylana markazi O bo'lsin (2-chizmaga qarang). OA, OB, OC kesmalarni va OM, OE ($OM \perp AC$, $OE \perp AB$) perpendikulyarlarni o'tkazamiz. Belgilash kiritamiz: $MB_1 = z$, $EC_1 = y$ bo'lsin. AOM va COM uchburchaklar to'g'ri burchakli bo'lgani uchun Pifagor teoremasidan foydalanib,

$$AO^2 - AM^2 = CO^2 - CM^2$$

tenglikka ega bo'lamiz, ya'ni

$$\left(a + c\right)^2 - \left(a - z\right)^2 = \left(c + r\right)^2 - \left(c + z\right)^2.$$

Bu tenglikdan $z = \frac{c - a}{c + a} \cdot r$ kelib chiqadi. Xuddi shunga o'xshash jarayonni takrorlab, $y = \frac{b - a}{b + a} \cdot r$ tenglikka ega bo'lamiz.



2-chizma

Belgilashlar kiritamiz: $\angle MAO = \alpha$, $\angle EAO = \beta$ va $n = \dfrac{c}{c+a}$, $m = \dfrac{b}{b+a}$, $x = \dfrac{r}{r+a}$. AOM va AEO uchburchaklar to‘g‘ri burchakli bo‘lgani uchun

$$\cos\alpha = \frac{a-z}{a+r} = 1 - \frac{z+r}{a+r} = 1 - \frac{2c}{c+a}\cdot\frac{r}{r+a} = 1 - 2xn$$

$$\cos\beta = \frac{a-y}{a+r} = 1 - \frac{y+r}{a+r} = 1 - \frac{2b}{b+a}\cdot\frac{r}{r+a} = 1 - 2xm$$

bo‘ladi.

ABC uchburchak uchun kosinuslar teoremasini qo‘llab,

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{(a+b)^2 + (a+c)^2 - (b+c)^2}{2(a+b)(a+c)} = 1 - 2mn$$

tenglikka ega bo‘lamiz.

Ushbu

$$(1-\cos^2\alpha)(1-\cos^2\beta) = (\cos\alpha\cdot\cos\beta - \cos(\alpha+\beta))^2$$

ayniyatni e’tiborga olsak,

$$\left(1-(1-2nx)^2\right)\left(1-(1-2mx)^2\right) = \left((1-2nx)(1-2mx) - (1-2mn)\right)^2$$

tenglik hosil bo‘ladi. Bu tenglikni soddalashtirsak, x ga nisbatan quyidagi kvadrat tenglama kelib chiqadi:

$$\left(4(mn)^2 + (m-n)^2\right)x^2 - 2mn(m+n)x + (mn)^2 = 0.$$

Bundan

$$x_1 = \frac{m+n-2\sqrt{mn(1-mn)}}{4(mn)^2 + (m-n)^2}\cdot mn$$

$$x_2 = \frac{m+n+2\sqrt{mn(1-mn)}}{4(mn)^2 + (m-n)^2}\cdot mn$$

echimlarga ega bo‘lamiz.

Biz izlayotgan r radius uchun faqat x_1 qiymat to‘g‘ri keladi (x_2 qiymat to‘g‘ri kelmasligini tekshirib ko‘rish mumkin).

Belgilashimizga ko‘ra, x_1 ning ifodasidan

$$r = \frac{abc}{ab + bc + ac + 2\sqrt{abc\left(a + b + c\right)}}$$

bo‘lishi kelib chiqadi. Tenglik isbotlandi.

3-masala. Diametri $AB = a + b$, $\left(a > 0,\ \ b > 0\right)$ ga teng bo‘lgan yarim doiraga markazi AB da yotgan, diametri a va b ga teng bo‘lgan yarim doiralar ichki chizilgan (3-chizmaga qarang). Uchta yarim aylana bilan chegaralangan shaklga diametri d ga teng aylana ichki chizilgan bo‘lsa,

$$d = \frac{ab\left(a + b\right)}{a^2 + ab + b^2}$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

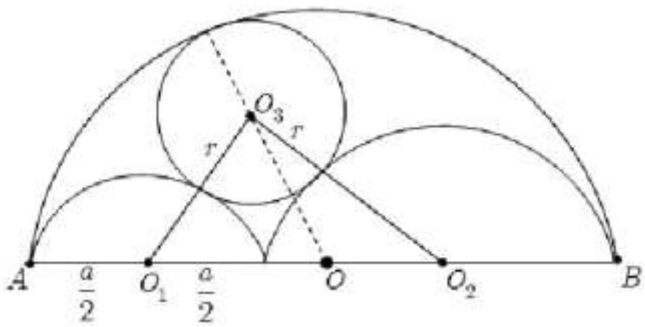
Yechish. Diametri $AB = a + b$, $a > 0$, $b > 0$ bo‘lgan doiralarning markazlari mos ravishda O, O_1, O_2 bo‘lsin. Aytaylik biz izlayotgan doira markazi O_3 va radiusi r bo‘lib, $\angle O_1OO_2 = \alpha$ bo‘lsin. U holda

$$OO_1 = AO - AO_1 = \frac{a + b}{2} - \frac{a}{2} = \frac{b}{2}, \qquad (3)$$

$$OO_2 = BO - BO_1 = \frac{a + b}{2} - \frac{b}{2} = \frac{a}{2}, \qquad (4)$$

$$OO_3 = \frac{a + b}{2} - r \qquad (5)$$

tengliklar o‘rinli.



3-chizma

Endi O_1OO_3 va O_2OO_3 uchburchaklarga kosinuslar teoremasini qo‘llaymiz:

$$O_1O_3^2 = OO_1^2 + OO_3^2 - 2OO_1 \cdot OO_3 \cdot \cos\alpha\,, \qquad (6)$$

$$O_2O_3^2 = OO_2^2 + OO_3^2 - 2OO_2 \cdot OO_3 \cdot \cos(\pi-\alpha)\,. \qquad (7)$$

(3), (4), (5) tengliklardan foydalansak, (6), (7) tenglamalar quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$\left(\frac{a}{2}+r\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+b}{2}-r\right)^2 - b\left(\frac{a+b}{2}-r\right)\cos\alpha\,, \qquad (8)$$

$$\left(\frac{b}{2}+r\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+b}{2}-r\right)^2 - a\left(\frac{a+b}{2}-r\right)\cos\alpha\,. \qquad (9)$$

(8) tenglikni a ga, (9) tenglikni esa b ga ko‘paytirib, hosil bo‘ladigan tengliklarni qo‘shamiz. U holda quyidagi tenglikka ega bo‘lamiz:

$$a\left(\frac{a}{2}+r\right)^2 + b\left(\frac{b}{2}-r\right)^2 = a\left(\frac{b}{2}\right)^2 + b\left(\frac{a}{2}\right)^2 + (a+b)\left(\frac{a+b}{2}-r\right)^2$$

Bu tenglikni soddalashtirib, undan r ni topamiz:

$$r = \frac{ab(a+b)}{2(a^2+ab+b^2)}.$$

Bu esa tenglik o‘rinli ekanini bildiradi.

Pifagor teoremasini qo‘llab, Eylerning mashhur teoremasini sodda isbotini keltiramiz.

4 – masala (Eyler teoremasi). Agar ABC uchburchakka ichki va tashqi chizilgan aylanalarning radiuslari r, R bo‘lsa, ularning markazlari orasidagi masofa d uchun

$$d^2 = R^2 - 2Rr \qquad (10)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Yechish: ABC uchburchak o‘tmas burchakli ($\angle C = \gamma > 90^{\circ}$) deb hisoblaymiz. Bu holda tashqi chizilgan aylana markazi uchburchakdan tashqarida bo‘ladi. $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$ va ichki chizilgan aylana markazi O_1 tashqi chizilgan aylana markazi O_2 bo‘lsin. Ichki chizilgan aylana AB tomonga K

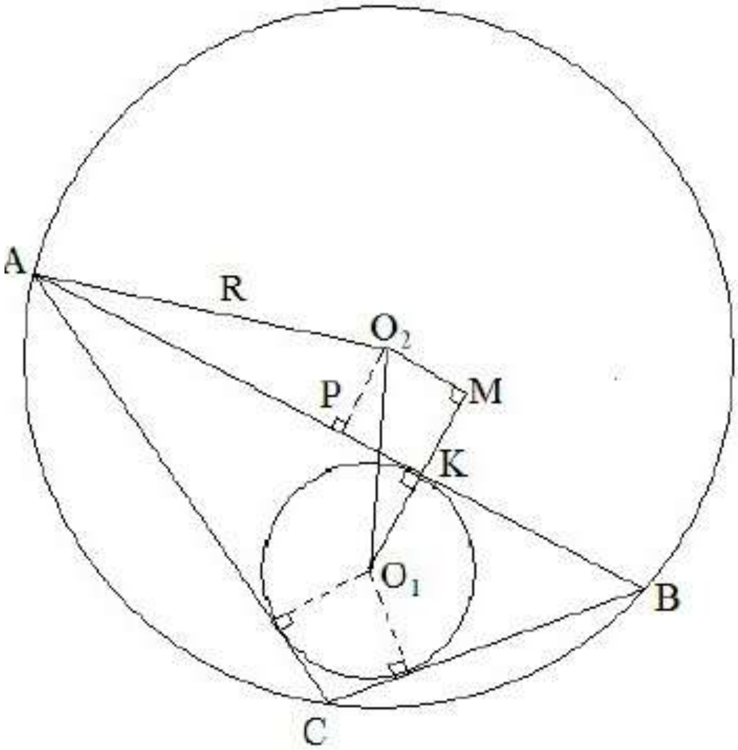
nuqtada urinsin. O_1K ning davomiga perpendikulyar bo‘lgan O_2M kesmani va $O_2P \perp AB$ kesmani o‘tkazamiz (4-chizmaga qarang).

Chizmaga asosan, O_1MO_2 uchburchakda

$$O_1M = r + \sqrt{R^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2}, \quad O_2M = PK = \frac{|a-b|}{2}, \quad O_1O_2 = d$$

bo‘lgani uchun

$$d^2 = \left(r + \sqrt{R^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = R^2 - 2Rr\cos\gamma - (p-a)(p-b) + r^2.$$



4-chizma

Endi ba’zi shakl almashtirishlarni bajaramiz:

1. $\cos\gamma = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \dfrac{(a-b)^2 - c^2 + 2ab}{2ab} = -\dfrac{2(p-a)(p-b)}{ab} + 1;$

13.00.00. – PEDAGOGIKA FANLARI
JOURNAL.NAMSPI.UZ
ISSN: 2992-9008; UDK: 37

2. $$\frac{Rr\,(p-a)(p-b)}{ab}=\frac{\dfrac{abc}{4S_{\Delta ABC}}\cdot\dfrac{S_{\Delta ABC}\,(p-a)(p-b)}{p}}{ab}=\frac{c(p-a)(p-b)}{4p};$$

3. $$r^2=\left(\frac{S_{\Delta ABC}}{p}\right)^2=\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}=(p-a)(p-b)-c\,\frac{(p-a)(p-b)}{p}.$$

Bularga ko‘ra

$$d^2=R^2-2Rr\left(-\frac{2(p-a)(p-b)}{ab}+1\right)-\frac{c(p-a)(p-b)}{p}=$$

$$=R^2-2Rr+4\frac{Rr\,(p-a)(p-b)}{ab}-\frac{c(p-a)(p-b)}{p}=$$

$$=R^2-2Rr+4\frac{c(p-a)(p-b)}{4p}-\frac{c(p-a)(p-b)}{p}=R^2-2Rr.$$

Demak, (10) tenglik o‘rinli. ABC uchburchak to‘g‘ri burchakli va o‘tkir burchakli bo‘lgan hollarda Eyler formulasini isbotlashni o‘quvchiga havola qilamiz. Tenglik isbotlandi.

XULOSA

Mazkur maqolada Pifagor teoremasi, Dekart koordinatalar sistemasi va vektorlar algebrasining turli geometrik va algebraik masalalarni yechishga qo‘llanilishi sohasi naqadar kengligini ko‘rsatildi. Shuningdek, ushbu mavzularni masalalar yechishga tatbiq qilishga doir misollar yechimi uslubiyatini ko‘rsatildi hamda uchburchak metrik munosabatlari bilan bog‘liq murakkab masalalar yechimlari o‘rganildi.

Ushbu ishdan oliy ta’lim muassasalarining quyi kurs talabalari, akademik litseylar hamda umumiy o‘rta ta’lim o‘quvchilari foydalanishlari mumkin. Mazkur ish o‘quvchilarning bilimlarini va matematikaga bo‘lgan qiziqishlarini oshiradi, hamda o‘quvchilarni matematikadan olimpidaga tayyorlashda to‘garak rahbarlariga bu ishning katta yordami tegadi, degan umiddamiz.

ADABIYOTLAR

1. O‘zbekiston Respublikasining “Ta’lim to‘g‘risida”gi Qonuni. Toshkent, 2020 yil, 23 sentabr, № 637 son.

2. 2020 yil 7 maydagi “Matematika sohasidagi ta’lim sifatini oshirish va ilmiy-tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi PQ 4708 sonli qarori
3. M.A. Mirzaahmedov, Sh.N. Ismailov. *Matematikadan qiziqarli va olimpiada masalalari*. I qism, Toshkent, “Turon-Iqbol”, 2016.
4. H. Norjigitov, J.A. Bahramov, “MATEMATIK OLIMPIADA MASALALARINI YECHISH UCHUN QO‘LLANMA”, Toshkent-2014.
5. Mal Coad and others, *Mathematics for the international students*, Haese and Harris publocations, Australia, 2010.
6. К.Жамуратов, Д.Абдухалимов, «ПРОЕКТИВ ТЕКИСЛИК ВА ПРОЕКТИВ ТЕКИСЛИКНИНГ БИР ЖИНСЛИ КООРДИНАТАЛАРИ» Международный научно-образовательный электронный журнал «ОБРАЗОВАНИЕ И НАУКА В XXI ВЕКЕ». Выпуск №68-3 (том 2) (ноябрь, 2025), 334-344.
7. Жамуратов К., Умаров Х. Р., Холбоев С. Решение одной задачи теории фильтрации методом квазистационарного приближения. ГулДУ ахборотномаси, №2, 2016 йил, 9-13 бетлар.
8. Жамуратов, К., Умаров, Х. Р., & Турдимуродов, Э. М. (2024). *О решении методом регуляризации одной системы функциональных уравнений с дифференциальным оператором* (Doctoral dissertation, Белорусско-Российский университет)
9. Umarov, K. R. (2025). Methods For Construction Of The Zhegalkin Polynomial. *TLEP–International Journal of Multidiscipline*, *2*(5), 76-79.
10. Umarov, X., & Goyibnazarov, K. (2025, October). Some Principles Of Creative Training And Education Of Modern Youth. In *International Conference on Global Trends and Innovations in Multidisciplinary Research* (Vol. 1, No. 4, pp. 91-93).
11. Goyibnazarov, K., & Umarov, X. (2025, October). Biological Applications Of The Definite Integral. In *International Conference on Global Trends and Innovations in Multidisciplinary Research* (Vol. 1, No. 4, pp. 84-87).
12. Narjigitov, X., Umarov, X. R., & Kuchkarova, S. I. (2026). CHIZIQLI INTEGRAL TENGLAMALARNI YECHISH USULLARI TARIXI HAQIDA. *SHOKH LIBRARY*, *1*(1).
13. Umarov X.R., Abduraximova D.D. “MATEMATIKADAN OLIMPIADA MASALALARINI YECHISHDA MATEMATIK ANALIZ METODLARIDAN FOYDALANISH” / Международный научно-практический электронный журнал «МОЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ КАРЬЕРА». Выпуск №68 (том 2) (январь, 2025). Дата выхода в свет: 31.01.2025. с. 68-74.
14. Umarov X.R., Asqarbekova D.J. // “НАТУРАЛ СОНЛАР ҚАТОРИ ДАРАЖАЛАРИ ЙИҒИНДИСИНИ ТОПИШНИНГ БИР УСУЛИ” Международный научно-практический электронный журнал «МОЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ КАРЬЕРА». Выпуск №68 (том 2) (январь, 2025). Дата выхода в свет: 31.01.2025. с. 74-84.
15. Umarov X.R., Erkinov Sh.B. // “YIG‘INDI VA KO‘PAYTMALARNI HISOBLASHDA KOMPLEKS ANALIZ METODLARIDAN FOYDALANISH” Международный научно-практический электронный журнал «МОЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ КАРЬЕРА». Выпуск №68 (том 2) (январь, 2025). с. 84-103.
16. Наржигитов Х., Умаров Х. «БИОЛОГИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛ» “Raqamli texnologiyalar va sun’iy intellektni

rivojlantirishning zamonaviy holati va istiqbollari" mavzusida ilmiy-amaliy anjumani materiallari to'plami – Guliston, 2022 y.

17. Умаров Х.Р., Эгамбердиева С.Н. АЙРИМ ХОСМАС ИНТЕГРАЛЛАРНИ ҲИСОБЛАШДА ЧЕГИРМАЛАР НАЗАРИЯСИДАН ФОЙДАЛАНИШ. Международный научно-практический электронный журнал «МОЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ КАРЬЕРА». Выпуск №78 (том 1) (ноябрь, 2025). стр, 161-177.

18. Umarov X.R., Abdurasulov O.U. O'LCHOVLI FUNKSIYALAR FAZOSI UCHUN DUALLIK PRINSIPI Международный научно-практический электронный журнал «МОЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ КАРЬЕРА». Выпуск №78 (том 1) (ноябрь, 2025). стр. 178-188.

19. Х.Умаров, З.Олимов. КЕТМА-КЕТЛИКЛАР l^p ФАЗОСИДАГИ ФУНКЦИОНАЛЛАРНИНГ УМУМИЙ КЎРИНИШИ. Международный научно-практический электронный журнал «МОЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ КАРЬЕРА». Выпуск №78 (том 1) (ноябрь, 2025) Стр. 189-193.

20. Умаров Х.Р., Райимқулова К.Б. Турли N-функциялар аниқлаган Орлич фазоларини таққослаш. Международный научно-образовательный электронный журнал «ОБРАЗОВАНИЕ И НАУКА В XXI ВЕКЕ». Выпуск №68-3 (том 2) (ноябрь, 2025). стр. 482-487.

21. Умаров Х.Р., Маматкаримова М.И. КОШИ ТЕНГСИЗЛИГИ ВА УНИНГ ТАТБИҚЛАРИ. Международный научно-образовательный электронный журнал «ОБРАЗОВАНИЕ И НАУКА В XXI ВЕКЕ». Выпуск №68-3 (том 2) (ноябрь, 2025). с. 477-481.

22. X.Narjigitov, X.R.Umarov, S.I.Kuchkarova, & Worldly Knowledge Publishing Centre. (2026). CHIZIQLI INTEGRAL TENGLAMALARNI YECHISH USULLARI TARIXI HAQIDA. В ILMIY TADQIQOTLAR VA ULARNING YECHIMLARI (Т.9, Выпуск 01, сс. 219–223). Zenodo. https://doi.org/10.5281/zenodo.18227815.